Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 8

In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass jedes Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum eine Norm definiert; siehe Lemma 3.4. Es entsteht jedoch nicht jede Norm auf diese Weise, wie die folgende Aufgabe zeigt.

Aufgabe 1.

(1) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\, , \rangle$ und zugehöriger Norm $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ die Gleichung
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$
gilt.

(2) Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ auf $\mathbb{R}^n$ durch
$$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$$
eine Norm definiert ist.

(3) Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ kein Skalarprodukt $\langle\, , \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ existiert mit $\|x\|_\infty = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Hinweis: (1).

Aufgabe 2. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$
Bestimmen Sie, ohne das charakteristische Polynom von A zu berechnen, die Eigenwerte von A, sowie eine Basis des $\mathbb{R}^4$, die aus Eigenvektoren von A besteht. Bestimmen Sie damit eine orthogonale Matrix, die A diagonalisiert.

Aufgabe 3. Skizzieren Sie die reellen Lösungen der Gleichungen
$$3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 4,$$
$$3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 = 4,$$
und diskutieren Sie die prinzipiellen Unterschiede zwischen den beiden Lösungsmengen.

Bringen Sie beide Gleichungen auf die Normalform $xA_ix^{\mathrm{t}} = 4$ für symmetrische Matrizen $A_1, A_2 \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.