Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 9

Aufgabe 1. Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und

$$h : V \times V \to \mathbb{C}$$

eine hermite'sche Form. Zeigen sie, dass es eindeutig bestimmte $\mathbb{R}$-bilineare Abbildungen $f, g : V \times V \to \mathbb{R}$ gibt derart, dass

- f symmetrisch ist,
- g antisymmetrisch ist und
- für alle $x, y \in V$ die Identität $h(x, y) = f(x, y) + ig(x, y)$ gilt.

Aufgabe 2. (Transformationsformel für Strukturmatrizen von Sesquilinearformen)

Seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine $\mathbb{C}$-Basis von V, $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform auf V und $B := (\beta(b_i, b_j)) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ die Strukturmatrix von β bezüglich $\mathcal{B}$. Ist $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ eine weitere Basis von V mit zugehöriger Strukturmatrix C und $S = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ die Basiswechselmatrix, so gilt

$$C = S^{\mathrm{t}} B \overline{S}.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\langle \, , \rangle : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad (A, B) \mapsto \mathrm{Sp}(A\overline{B}^{\mathrm{t}})$$

ein Skalarprodukt auf dem komplexen Vektorraum $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ ist. Bestimmen Sie eine Orthonomalbasis von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ bezüglich $\langle \, , \rangle$.