Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Mathematik 2 für Chemie

Präsenzübungsblatt 11

Aufgabe 1. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei V_n der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens n. Sie können ohne Beweis annehmen, dass die Polynome x^i für $i = 0, \dots, n$ eine Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ von V_n bilden. Sei nun

$$\Delta : V^n \to V^n, \quad f \mapsto f'$$

die Abbildung, die einem Polynom $f \in V^n$ seine Ableitung f' zuordnet:

$$\Delta\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}.$$

(1) Zeigen Sie, dass Δ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist.
(2) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Delta)$.

Aufgabe 2. Seien K ein Körper, V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es geordnete K-Basen für V und W gibt mit der Eigenschaft, dass die darstellende Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,\dim W \\ j=1,\dots,\dim V}}$ von f bezüglich dieser Basen die folgende Gestalt hat:

$$a_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{falls } 1 \leq i, j \leq \dim_K(\mathrm{Im}(f)), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei ist $\mathrm{Im}(f) = f(V)$, das *Bild* von f, und δ_{ij} das Kronecker-Symbol, d.h.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \text{ und} \\ 0 & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

Aufgabe 3. Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien gegeben die Vektoren

$$v_1 = (1, -1, 2)^{\mathrm{t}}, \quad v_2 = (-1, 2, 1), \quad v_3 = (1, -1, 0).$$

(1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.
(2) Bestimmen Sie die darstellende Matrix T der $\mathbb{R}$-linearen Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad e_i \mapsto v_i,$$

die dadurch festgelegt ist, dass sie die Standardeinheitsvektoren e_i, $i = 1, 2, 3$, auf die Vektoren v_1, v_2, v_3 abbildet, bezüglich der Standardeinheitsbasis $\mathcal{E}_3$.
(3) Bestimmen Sie die darstellende Matrix T' der Umkehrabbildung

$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v_i \mapsto e_i$$

bezüglich der Standardeinheitsbasis $\mathcal{E}_3$.
(4) Bestimmen Sie die Matrizen TT' und $T'T$ und interpretieren Sie Ihre Rechnungen.