Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Mathematik 2 für Chemie
Präsenzübungsblatt 8

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Wir definieren, gewissermassen *ad hoc*, die Determinante einer 2×2-Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_2(K)$ durch die Formel

$$\det(A) := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $\det : \mathrm{Mat}_2(K) \to K$ die folgenden Eigenschaften besitzt: Für $\lambda \in K$ und $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_1^{(2)}, a_1^{(2)}, a^{(1)}, a^{(2)} \in K^2$ gelten

(1)
$$\det(\lambda a^{(1)}, a^{(2)}) = \det(a^{(1)}, \lambda a^{(2)}) = \lambda \det(A),$$

(2)
$$\det(a_1^{(1)} + a_2^{(1)}, a^{(2)}) = \det(a_1^{(1)}, a^{(2)}) + \det(a_2^{(1)}, a^{(2)}),$$
$$\det(a_1^{(1)}, a_1^{(2)} + a_2^{(2)}) = \det(a^{(1)}, a_1^{(2)}) + \det(a^{(1)}, a_2^{(2)}),$$

(3)
$$\det(a^{(1)}, a^{(2)}) = -\det(a^{(2)}, a^{(1)}).$$

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Invertierbarkeit und geben Sie gegebenenfalls die Inverse an.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -6 & -8 & -8 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3. Seien $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $b \in K^n$. Zeigen Sie: Das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

ist genau dann eindeutig lösbar, wenn A invertierbar ist.