Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Mathematik 2 für Chemie

Präsenzübungsblatt 9

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Sei $n \in \mathbb{N}$.

(1) Zeigen Sie, dass $\det(A) = \det(A^{\mathrm{t}})$ für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

(2) Schließen Sie, dass, falls n ungerade ist und $A^{\mathrm{t}} = -A$,

$$2\det(A) = 0$$

gilt.

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

wobei $B \in \mathrm{Mat}_m(K)$ für ein $m \leq n$, $E \in \mathrm{Mat}_{n-m}(K)$, $C \in \mathrm{Mat}_{m,n-m}(K)$ und $0 \in \mathrm{Mat}_{n-m,m}(K)$ die Nullmatriz bezeichnet. Man zeige, dass

$$\det(A) = \det(B)\det(E)$$

gilt.

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i < j \\ 0 & \text{für } i = j \\ -1 & \text{für } i > j. \end{cases}$$

Man zeige $\det(A) = 1$. Hinweis: Manipulieren Sie zunächst nur die ersten zwei Zeilen und Spalten von A durch Operationen, die die Determinante invariant lassen, bis Sie induktiv argumentieren können (etwa mithilfe von Aufgabe 2).