Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 1

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 19. April 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Es sei K ein beliebiger Körper. Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume, mit Basen $\mathcal{B}_V$ bzw. $\mathcal{B}_W$. Wie üblich bezeichnen $\mathcal{B}_W{}^*$ bzw. $\mathcal{B}_V{}^*$ die jeweils dualen Basen. Es sei $\beta : V \times W \to K$ eine K-Bilinearform. In der Vorlesung hatten wir folgende Abbildungen eingeführt:

$$\begin{aligned} \beta_1 : V \to W^*, &\quad v \mapsto (w \mapsto \beta(v, w)), \\ \beta_2 : W \to V^*, &\quad w \mapsto (v \mapsto \beta(v, w)). \end{aligned}$$

Aufgabe 1. Beweisen Sie Proposition 1.5 der Vorlesung: Ist $B \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$ die Strukturmatrix von β bzgl. $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$, so gilt

(1) $B^{\mathrm{t}} = M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W{}^*}(\beta_1)$ und
(2) $B = M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V{}^*}(\beta_2)$.

Aufgabe 2. Wir nehmen nun an, dass $\dim_K V = \dim_K W$ gilt. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Eigenschaften:

(1) β ist nicht ausgeartet in der ersten Variablen.
(2) β ist nicht ausgeartet in der zweiten Variablen.
(3) B ist invertierbar.

Aufgabe 3. Welche der folgenden Funktionen $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$-Bilinearformen? Begründen Sie Ihre Antworten. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Strukturmatrizen bezüglich der Basen $\mathcal{B}_1 := (e_1, e_2)$ sowie $\mathcal{B}_2 := (e_1 + e_2, e_2)$ von $\mathbb{R}^2$, wobei e_i die Standardeinheitsvektoren bezeichnen. Seien $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$.

(1) $\beta(x, y) = -2x_1y_2 - y_1^2 + 5x_2y_1$
(2) $\beta(x, y) = -x_2y_1 + 3x_1y_2$
(3) $\beta(x, y) = 7x_1 - x_2$
(4) $\beta(x, y) = x_1x_2 + 4y_1y_2$
(5) $\beta(x, y) = 3x_1y_1 + x_2x_1 + 1$

Aufgabe 4. Die *Spur* einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ist $\mathrm{Sp}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\beta^{(n)} : \mathrm{Mat}_n(K) \times \mathrm{Mat}_n(K) \to K, \quad (A, B) \mapsto \mathrm{Sp}(AB)$$

ist eine symmetrische Bilinearform. Berechnen Sie die Strukturmatrix von $\beta^{(2)}$ bezüglich der folgenden K-Basen von $\mathrm{Mat}_2(K)$:

(1) $\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$,
(2) $\mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 2

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 26. April 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Seien K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.

Aufgabe 1. ('Korollar 1.17 der VL') Seien W ein weiterer K-Vektorraum der K-Dimension n und $\beta : V \times W \to K$ eine nicht ausgeartete Bilinearform. Es seien $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$ Basen von V bzw. W und B die Strukturmatrix von β bezgl. $\mathcal{B}_W$ und $\mathcal{B}_V$. Zeigen Sie:

(1) Ist $h \in \mathrm{End}(V)$ dargestellt durch die Matrix $A = M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V}(h)$, so ist $h^\wedge$ dargestellt durch
$$B^{-1}A^{\mathrm{t}}B = M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_W}(h^\wedge).$$

(2) Ist $k \in \mathrm{End}(W)$ dargestellt durch $C = M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_W}(k)$, so ist ${}^\wedge k \in \mathrm{End}(V)$ dargestellt durch
$$(B^{-1})^{\mathrm{t}}C^{\mathrm{t}}B^{\mathrm{t}} = M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V}({}^\wedge k).$$

Aufgabe 2. Es seien $\beta : V \times V \to K$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform und $U \leq V$ ein K-linearer Unterraum. Auf dem Präsenzaufgabenblatt 2 hatten wir das orthogonale Komplement
$$U^\perp := \{v \in V \mid \beta(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$
definiert. Zeigen Sie

(1) dass die Formel
$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$
gilt.

(2) anhand von Beispielen, dass
   (a) die Gleichung in (1) im Allgemeinen falsch wird, wenn die Bedingung 'β nicht ausgeartet' fallen gelassen wird und
   (b) auch im nicht ausgearteten Fall nicht notwendigerweise $V = U \oplus U^\perp$ gilt.

Aufgabe 3. ('Satz 1.29 der VL') Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei q eine nicht ausgeartete quadratische Form auf V. Zeigen Sie: Es existiert eine $\mathbb{R}$-Basis $\mathcal{B}$ von V, bezüglich derer die Strukturmatrix von q die Gestalt
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$
hat.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie, für jede der beiden folgenden symmetrischen reellen Matrizen B, eine invertierbare Matrix T derart, dass $T^{\mathrm{t}}BT$ diagonal ist. Bestimmen Sie jeweils Rang und Signatur der entsprechenden quadratischen Formen.

(1)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

(2)
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 3

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 03. Mai 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1. Wir betrachten $V = \mathbb{R}^n$ als quadratischen Raum mit dem Standardskalarprodukt. Ergänzen Sie in den beiden folgenden Fällen die gegebenen Vektoren jeweils zu einer Orthonormalbasis des jeweiligen Vektorraums.

(1) $V = \mathbb{R}^3$, $v = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$,
(2) $V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$, $v_2 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$.

Aufgabe 2. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2. Auf dem Präsenzübungsblatt 3 hatten Sie gezeigt, dass

$$\phi : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V ist.

(1) Zeigen Sie, dass ϕ positiv definit ist.
(2) Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ an, um eine Orthonormalbasis von V bezüglich ϕ zu berechnen.

Aufgabe 3. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ heißt *orthogonal* wenn $A^{-1} = A^{\mathrm{t}}$ gilt. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(1) Die Summe zweier orthogonaler Matrizen ist orthogonal.
(2) Das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist orthogonal.
(3) Die Transponierte einer orthogonalen Matrix ist orthogonal.
(4) Die Inverse einer orthogonalen Matrix ist orthogonal.
(5) Ist $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ orthogonal, so ist $\det(A) \in \{-1, 1\}$.
(6) Ist $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ und gilt $\det(A) \in \{-1, 1\}$, so ist A orthogonal.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ schiefsymmetrisch, d.h. $A = -A^{\mathrm{t}}$, derart, dass $\det(\mathrm{Id}_n + A) \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$(\mathrm{Id}_n - A)(\mathrm{Id}_n + A)^{-1}$$

orthogonal ist.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 4

Abgabe bis 10:00 Uhr am **Mittwoch, den 09. Mai 2018**, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Bestimmen Sie das characteristische Polynom χ_A derMatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}),$$

sowie sämtliche Eigenwerte und Eigenräume von A. Berechnen Sie, für jeden Eigenwert λ von A,

(1) die geometrische Vielfachheit $\dim V_\lambda(f_A)$ sowie
(2) die algebraische Vielfachheit $m_{f_A}(\lambda)$.

Sei K ein Körper.

Aufgabe 2. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $n > 0$ gibt derart, dass

$$f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{mal}} = 0.$$

Zeigen Sie, dass ein nilpotenter Endomorphismus von V stets genau einen Eigenwert hat, nämlich 0.

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne S_n die symmetrische Gruppe vom Grad n.

(1) Seien $\tau \in S_n$ der n-Zykel $\tau = (1\,2\ldots n)$ und $P_\tau \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die zugehörige Permutationsmatrix. Zeigen Sie, dass

$$\chi_{P_\tau}(X) = X^n - 1.$$

(2) Sei nun $\sigma \in S_n$ beliebig, und $P_\sigma \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die zugehörige Permutationsmatrix. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_{P_σ}. Hinweis: Schreiben Sie σ als Produkt von Zykeln, und wenden Sie Teil 1 der Aufgabe an.

Aufgabe 4. Seien $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $B \in \mathrm{GL}_n(K)$. Zeigen Sie, dass

$$\chi_A = \chi_{BAB^{-1}}$$

gilt. (Man sagt daher, dass das charakteristische Polynom einer Matrix A *invariant unter Konjugation* sei.)

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 5

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 17. Mai 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Seien V ein K-Vektorraum und $U_1, \dots, U_r$ K-lineare Unterräume von V. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(1) $V = \bigoplus_{i=1}^r U_i$,
(2) $V = \sum_{i=1}^r U_i$ und $U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = 0$ für $i = 1, \dots, r$.

Zeigen Sie weiter: Ist $\dim V < \infty$, so sind (1) und (2) auch äquivalent zu

$$\dim V = \dim \left(\sum_{i=1}^r U_i \right) = \sum_{i=1}^r \dim U_i. \tag{3}$$

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit charakteristischem Polynom χ_A und sei

$$\phi_A : \mathrm{Mat}_n(K) \to \mathrm{Mat}_n(K), \quad M \mapsto MA.$$

Zeigen Sie, dass für das charakteristische Polynom von ϕ_A gilt:

$$\chi_{\phi_A} = \chi_A^n.$$

Hinweis: Stellen Sie die lineare Abbildung ϕ_A bezüglich einer geeigneten K-Basis von $\mathrm{Mat}_n(K)$ durch eine Matrix dar.

Aufgabe 3. Betrachten Sie, für $x \in \mathbb{R}$, die Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & x & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

(1) Zeigen Sie, dass $\lambda = 5$ ein Eigenwert von $A(x)$ ist, und bestimmen Sie die algebraische Multiplizität $m_{A(x)}(5)$.
(2) Nach Proposition 2.14 der Vorlesung gilt $\dim_{\mathbb{R}} V_5(A(x)) \leq m_{A(x)}(5)$. Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ gilt $\dim_{\mathbb{R}} V_5(A(x)) = m_{A(x)}(5)$? Für welche gilt $\dim_{\mathbb{R}} V_5(A(x)) = 1$?

Aufgabe 4. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

(1) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_A und die Eigenwerte von A.
(2) Diagonalisieren Sie A.
(3) Zeigen Sie: Es gibt eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit der Eigenschaft, dass

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine lineare Rekursionsgleichung für die Glieder dieser Folge.
(4) Schließen Sie, dass mit $\phi := (1+\sqrt{5})/2$ und $\psi := (1-\sqrt{5})/2$ gilt:

$$u_n = (\phi^n - \psi^n)/\sqrt{5} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 6

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 24. Mai 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

Aufgabe 1. Sei $f \in \operatorname{End}(V)$. Zeigen Sie: Ist jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von f, so ist f eine *Homothetie*, d.h. es gibt ein $\lambda \in K$ derart, dass $f = \lambda \operatorname{id}$.

Aufgabe 2. Zur Erinnerung: Ein Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ heißt *nilpotent* wenn $f^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ und $\dim V = n$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) f ist nilpotent.
(2) $\chi_f = X^n$.
(3) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, bezüglich derer f durch eine *strikte* obere Dreiecksmatrix dargestellt ist, d.h. $(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f))_{ij} = 0$ falls $i \geq j$.
(4) $f^n = 0$.

Aufgabe 3. Eine Matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ heißt *nilpotent* wenn $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Man zeige:

(1) $\operatorname{Sp}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0$.
(2) $\det(\operatorname{Id}_n - A) = \det(\operatorname{Id}_n + A) = 1$.
(3) Ist $B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ mit A vertauschbar (d.h. gilt $AB = BA$), so gilt $\det(A + B) = \det(B)$.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

(1) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_A und das Minimalpolynom μ_A von A.
(2) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A sowie ihre geometrischen und algebraischen Vielfachheiten.
(3) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie gegebenenfalls eine diagonalisierende Matrix, d.h. eine Matrix $S \in \operatorname{GL}_3(\mathbb{R})$ derart, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.
(4) Ist A trigonalisierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine trigonalisierende Matrix, d.h. eine Matrix $T \in \operatorname{GL}_3(\mathbb{R})$ derart, dass $T^{-1}AT$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 7

Abgabe bis 10:00 Uhr am **Mittwoch, den 30. Mai 2018**, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

(1) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von A besteht.
(2) Geben Sie eine orthogonale Matrix $S \in O_3$ an, für die $S^{\mathrm{t}}AS$ eine Diagonalmatrix ist.
(3) Bestimmen Sie die Signatur der quadratischen Form $q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Seien $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper der Charakteristik ungleich 2, d.h. $2 \neq 0$ in K. Sei

$$f : \mathrm{Mat}_n(K) \to \mathrm{Mat}_n(K), \quad A \mapsto A^{\mathrm{t}}$$

die K-lineare Abbildung, die einer Matrix A ihre Transponierte A^{t} zuordnet.

(1) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren sowie das charakteristische und Minimalpolynom von f.
(2) Besitzt $\mathrm{Mat}_n(K)$ eine Eigenbasis bezüglich f?

Aufgabe 3. Seien K ein beliebiger Körper und $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix über K. Zeigen Sie: Es existiert ein Polynom $f \in K[X]$ vom Grad $\deg(f) < n$ derart, dass $f(A) = A^{-1}$.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix mit charakteristischem Polynom

$$\chi_A(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \cdots + a_{n-1}X + a_n \in \mathbb{R}[X].$$

(Beachten Sie, dass $a_0 = 1$). Zeigen Sie, dass für den Rang $\mathrm{rk}(A)$ von A gilt:

$$\mathrm{rk}(A) = \max\{i \in \{0, 1, \ldots, n\} \mid a_i \neq 0\}.$$

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 8

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 07. Juni 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1. Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ über einem Körper K heissen *ähnlich* oder *konjugiert zueinander*, falls ein $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $T^{-1}AT = B$.

Zeigen Sie: Genau dann sind zwei symmetrische Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ konjugiert zueinander, wenn sie über O_n zueinander konjugiert sind, d.h. wenn es ein $T \in O_n$ gibt mit $T^{-1}AT = B$.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die durch das reelle Polynom

$X_1^2 - 4\sqrt{6}X_1X_2 + 2\sqrt{2}X_1X_3 + 4\sqrt{3}X_2X_3 + 2X_3^2 + 4\sqrt{3}X_1 + 6\sqrt{2}X_2 - 2\sqrt{6}X_3 - 3$

definierte Quadrik. Bringen Sie das Polynom in Normalform, bestimmen Sie die Hauptachsen der Quadrik und beschreiben Sie die Menge ihrer reellen Punkte. Ist diese Menge kompakt?

Aufgabe 3. Sei K ein Körper. Die Abbildung

$d : K^n \times K^n \to \{0, 1, \ldots, n\}, \quad ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto \#\{i \mid x_i \neq y_i\}$

heißt Hamming[1]-Abstand. Zeigen Sie:

(1) Der Hamming-Abstand ist eine Metrik im Sinne von Definition 3.5 der Vorlesung.
(2) Der Hamming-Abstand ist translationsinvariant, d.h.
$$d(x + z, y + z) = d(x, y)$$
für alle $x, y, z \in K^n$.

Kommt der Hamming-Abstand von einer Norm (Definition 3.3) im Sinne von Lemma 3.4? Wenn ja, von welcher?

Aufgabe 4. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und $x_0 \in X$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$d_{x_0} : X \times X \to \mathbb{R},$$
$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ d(x, x_0) + d(x_0, y) & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik ist. (Gelegentlich wird sie *British-Rail-* oder *SNCF-Metrik* genannt.) Ist sie translationsinvariant? Kommt sie von einer Norm?

[1] R. Hamming (1915 –1998)

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 9

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 14. Juni 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Wir hatten in der Vorlesung die *unitäre Gruppe* $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ eingeführt. Sei $U \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Im Folgenden bezeichnen, wie gewöhnlich, $\overline{U}$ die Komplexkonjugierte, U^{t} die Transponierte und $U^* = \overline{U}^{\mathrm{t}}$ die Transponiertkonjugierte von U, und $(\mathbb{C}^n, \langle\, , \rangle)$ den unitären Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle\, , \rangle$.

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$.
(2) $U^{\mathrm{t}}\overline{U} = \mathrm{Id}_n$.
(3) $U^*U = \mathrm{Id}_n$.
(4) $UU^* = \mathrm{Id}_n$.
(5) U ist invertierbar und $U^{-1} = U^*$.
(6) Die Spalten von U bilden eine ONB von $(\mathbb{C}^n, \langle\, , \rangle)$.
(7) Die Zeilen von U bilden eine ONB von $(\mathbb{C}^n, \langle\, , \rangle)$.

Folgern Sie, dass für eine Matrix $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ stets $|\det(U)| = 1$ gilt.

Aufgabe 2. Sei V ein unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

(1) Es gibt eindeutig bestimmte selbstadjungierte Endomorphismen $f_1, f_2 \in \mathrm{End}(V)$ derart, dass $f = f_1 + i f_2$.
(2) Genau dann ist f normal, wenn f_1 und f_2 miteinander vertauschen.

Aufgabe 3. Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum. Zeigen Sie:

(1) Die Abbildung
$$\mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathbb{C}, \quad (f, g) \mapsto \langle f, g\rangle := \mathrm{Sp}(fg^*)$$
ist ein Skalarprodukt, d.h. $(\mathrm{End}(V), \langle\, , \rangle)$ ist ein unitärer Vektorraum ist. Hinweis: Präsenzaufgabenblatt 9, Aufgabe 3.
(2) Sind $f, g \in \mathrm{End}(V)$ normal und gilt $fg = 0$, so gilt $gf = 0$.

Aufgabe 4. Sei $U \leq \mathbb{C}^4$ der von $(-1, 0, i, 1)$ und $(1, 0, 1, 0)$ erzeugte $\mathbb{C}$-lineare Unterraum. Finden Sie eine Orthonormalbasis von U bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{C}^4$. Hinweis: Gram-Schmidt.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 10

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 21. Juni 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{O}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Hinweis: Wir hatten in der Vorlesung bereits die Elemente der Untergruppe SO_2 charakterisiert. Es reicht also, die Elemente von $\mathrm{O}_2 \setminus \mathrm{SO}_2$ zu bestimmen. Orientieren Sie sich dabei am Beweis des in der Vorlesung bewiesenen Satzes zur Beschreibung der SO_2.

Aufgabe 2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{90} \begin{pmatrix} 66 & -18\sqrt{6} & 10\sqrt{18} \\ 6\sqrt{6} & 72 & 15\sqrt{12} \\ -14\sqrt{18} & -9\sqrt{12} & 60 \end{pmatrix}.$$

Verifizieren Sie, dass A unitär ist. Bestimmen Sie eine unitäre Matrix U derart, dass U^*AU diagonal ist, und bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie: Ist $A^2 = \pm \mathrm{Id}_n$, so ist A diagonalisierbar, aber im Allgemeinen nicht normal.

Aufgabe 4. Sei V ein unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

(1) f ist genau dann selbstadjungiert, wenn f normal ist und alle Eigenwerte von f reell sind.
(2) Ist f normal und nilpotent, so ist $f = 0$.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 11

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 28. Juni 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1. Sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie:

(1) Elemente $a, b \in R$ sind genau dann assoziiert (d.h. $a|b$ und $b|a$), wenn es eine Einheit $e \in R^\times$ gibt mit $a = eb$.
(2) Jedes Primelement $a \in R \setminus \{0\}$ ist irreduzibel.

Aufgabe 2. Seien $a_1, \ldots, a_r$ Elemente eines Integritätsbereichs R. Zeigen Sie: Sind d und d' größte gemeinsame Teiler von $a_1, \ldots, a_r$, so sind d und d' assoziiert.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie

(1) die irreduziblen Elemente in den Polynomringen $\mathbb{C}[X]$ und $\mathbb{R}[X]$,
(2) die irreduziblen Polynome in $\mathbb{Z}/(2)[X]$ vom Grad höchstens 4.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$.

(1) Bestimmen Sie alle Einheiten sowie alle Nullteiler des Rings $\mathbb{Z}/(n)$.
(2) Für welche n ist $\mathbb{Z}/(n)$ ein Integritätsbereich?

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 12

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 05. Juli 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie: Genau dann ist das charakteristische Polynom von f irreduzibel, wenn $\{0\}$ und V die einzigen f-invarianten K-linearen Unterräume von V sind.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ konjugiert zu ihrer Transponierten A^{t}.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Invariantenteiler der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Z}).$$

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Z})$, zu der A äquivalent ist.

Aufgabe 4. Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1-X & 1+X & X \\ X & 1-X & 1 \\ 1+X & 2X & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q}[X]).$$

Bestimmen Sie $S, T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}[X])$ mit

$$SAT = \mathrm{diag}(c_1, c_2, c_3),$$

wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Q}[X]$ mit $c_1 | c_2 | c_3$.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 13

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 12. Juli 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1. Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie die Invarianten-, Determinanten- und (Weierstraßschen) Elementarteiler von A, sowie

(1) die Frobeniussche Normalform,
(2) die Weierstraßsche Normalform und
(3) die Jordansche Normalform

von A.

Aufgabe 2. Sei V ein 6-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Bestimmen Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen von Endomorphismen $f \in \mathrm{End}(V)$ mit charakteristischem Polynom

$$\chi_f(X) = (X-3)^2(X-4)^4$$

und Minimalpolynom

$$\mu_f(X) = (X-3)(X-4)^2.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die größte natürliche Zahl n derart, dass zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ genau dann konjugiert sind, wenn $\chi_A = \chi_B$ und $\mu_A = \mu_B$ gilt. Geben Sie zwei Matrizen in $\mathrm{Mat}_{n+1}(\mathbb{C})$ an, für die dies nicht gilt.

Aufgabe 4. Gegeben sei ein Endomorphismus f eines 6-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums V mit

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= (X-1)^4(X+2)^2, \\ \mu_f(X) &= (X-1)^2(X+2)^2, \\ \dim_{\mathbb{C}}(V_1(f)) &= 3, \\ \dim_{\mathbb{C}}(V_{-2}(f)) &= 1. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass f durch diese Daten bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von f.