Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 2[1]

Es seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Ferner seien $\beta : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform und $X \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge. Wir nennen

$$X^\perp := \{v \in V \mid \beta(v,x) = 0 \text{ für alle } x \in X\}$$

das *orthogonale Komplemenent von X in V bezüglich β.*

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(1) $X^\perp$ ist ein K-linearer Unterraum von V.
(2) $X^\perp = \langle X \rangle^\perp$. Hierbei bezeichnet, wie gewöhnlich, $\langle X \rangle$ den von X erzeugten K-linearen Unterraum von V.

Aufgabe 2. Man betrachte die Abbildung

$$\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$
$$((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) \mapsto x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 - 5x_1y_2 - 5x_2y_1.$$

(1) Zeigen Sie, dass β eine symmetrische Bilinearform ist. Ist β ausgeartet?
(2) Bestimmen Sie die Strukturmatrix B von β bezüglich der Standardeinheitsbasis $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ von V.
(3) Bestimmen Sie die Strukturmatrix B' von β bezüglich der K-Basis $\mathcal{B}' = (e_1, e_2 - e_1, 2e_1 - 3e_2 + e_3)$ von V.
(4) Verifizieren Sie Korollar 1.10 der Vorlesung in diesem Fall:
$$B' = T^{\mathrm{t}} B T,$$
wobei $T = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Aufgabe 3. Sei β die Bilinearform aus Aufgabe 2. Beschreiben Sie die Komplemente $X_i^\perp$ in $\mathbb{R}^3$ bezüglich β der folgenden Mengen $X_i \subseteq \mathbb{R}^3$:

(1) $X_0 = \varnothing$,
(2) $X_1 = \{0\}$,
(3) $X_2 = \{(-1,0,2)\}$,
(4) $X_3 = (1,2,3) + (-1,2,3)\mathbb{R}$,
(5) $X_4 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$,
(6) $X_5 = \mathbb{R}^3$.

Vergleichen Sie jeweils $\dim_{\mathbb{R}}\langle X_i \rangle$ mit $\dim_{\mathbb{R}} X_i^\perp$. Können Sie eine allgemeine Vermutung formulieren? Und beweisen?

Aufgabe 4.

(1) Zeigen Sie, dass Kongruenz von Matrizen (vgl. Definition 1.12 der Vorlesung) eine Äquivalenzrelation ist.

[1] Die Präsenzübungen beginnen in Woche 2. Es gibt kein Präsenzübungsblatt 1.

(2) Seien K ein Körper und $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Man sagt, die Matrix A sei *ähnlich* oder *konjugiert* zur Matrix B, falls ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $B = S^{-1}AS$. (Schreibe $A \approx B$.) Zeigen Sie, dass auch Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 3

Aufgabe 1. Es sei
$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

(1) Entscheiden Sie, ob die quadratische Form
$$q_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto (x,y)A(x,y)^{\mathrm{t}}$$
ausgeartet ist.

(2) Nach Satz 1.26 der Vorlesung gibt es eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Form q_A. Bestimmen Sie eine solche Basis. Finden Sie auch eine Orthonormalbasis?

(3) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ derart, dass $T^{\mathrm{t}}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass jede symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ eine Darstellung
$$A = S^{\mathrm{t}}S$$
mit einer geeigneten Matrix $S \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ hat.

Aufgabe 3. Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der rellen Polynome vom Grad höchstens 2. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\phi : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$
eine symmetrische Bilinearform ist, und bestimmen Sie die Strukturmatrix von ϕ bezüglich einer geeigneten Basis von V. Ist ϕ ausgeartet?

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 4

Aufgabe 1. Seien K ein Körper und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_2(K)$. Zeigen Sie, dass für das charakteristische Polynom

$$\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{Sp}(A)X + \det(A)$$

gilt, wobei $\mathrm{Sp}(A) = a_{11} + a_{22}$ die Spur von A bezeichnet. Können Sie diese Beobachtung auf beliebige $n \times n$-Matrizen verallgemeinern?

Aufgabe 2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

(1) Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von A.
(2) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3$ eine Basis aus Eigenvektoren von A besitzt.
(3) Zeigen Sie, dass es eine Diagonalmatrix $D \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ und eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ gibt derart, dass

$$D = T^{-1}AT.$$

Aufgabe 3. Sei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Berechnen Sie B^{25}.

(Hinweis: In der Vorlesung hatten wir bereits die Eigenwerte und -räume von B bestimmt. Nutzen Sie diese Beschreibung, um B mithilfe geeigneter Basiswechselmatrizen auf Diagonalgestalt zu bringen.)

Fakultät für Mathematik | Prof. Dr. Christopher Voll
Universität Bielefeld | Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 5

Aufgabe 1. Sei $V = C^\infty(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Weiter sei

$$\Delta : V \to V, \quad f \mapsto f'$$

die Abbildung, die einer Funktion f ihre Ableitung f' zuordnet. Zeigen Sie:

(1) $\Delta \in \mathrm{End}(V)$.
(2) Jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von Δ. Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f_\lambda(x) := e^{\lambda x}$.
(3) Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in V_\lambda(\Delta)$ ist $f f_{-\lambda}$ konstant. Folgern Sie, dass $\dim_{\mathbb{R}} V_\lambda(\Delta) = 1$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

Besitzt V eine Eigenbasis bezüglich Δ?

Aufgabe 2. Geben Sie ein Beispiel eines Endomorphismus eines 2-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums, der keine Eigenvektoren hat. Zeigen Sie weiter, dass jeder Endomorphismus eines 3-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums mindestens einen Eigenvektor besitzt.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_A von A.
(2) Bestimmen Sie die Eigenwerte und -räume von A als Element von $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$.
(3) Bestimmen Sie die Eigenwerte und -räume von A als Element von $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 6

Aufgabe 1. Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix
$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$
diagonalisierbar?

Aufgabe 2. Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $\lambda \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq \dim V$. Geben Sie ein Beispiel eines K-linearen Endomorphismus von V an, dessen Eigenraum zum Eigenwert λ die Dimension 1 besitzt, und in dessen charakteristischem Polynom die Nullstelle λ die Multiplizität n besitzt.

Aufgabe 3. Seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus und W ein f-invarianter K-linearer Unterraum von V. Zeigen Sie, dass die Einschränkung
$$f_W := f|_W : W \to W, \quad w \mapsto f(w)$$
diagonalisierbar ist.

Fakultät für Mathematik | Prof. Dr. Christopher Voll
Universität Bielefeld | Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 7

Aufgabe 1. Trigonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

Im Folgenden seien K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

Aufgabe 2. Seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$ derart, dass

$$f \circ g = g \circ f$$

("f und g vertauschen"). Zeigen Sie, dass jeder Eigenraum von f invariant unter g ist.

Es sei I eine beliebige Menge. Eine Familie $(f_i)_{i \in I}$ von Endomorphismen von V heißt *simultan diagonalisierbar*, wenn es eine Basis von V gibt, die simultan Eigenbasis für jedes f_i, $i \in I$ ist, oder, äquivalenterweise, die Matrizen $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_i)$ alle Diagonalmatrizen sind.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Jede Familie $(f_i)_{i \in I}$ paarweise vertauschender, diagonalisierbarer Endomorphismen von V (d.h. jeder der f_i ist diagonalisierbar und $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ für alle $i, j \in I$) ist simultan diagonalisierbar.

Hinweis: Ohne Einschränkung gibt es in der Familie einen Endomorphismus f, der keine Homothetie ist. Da f diagonalisierbar ist, ist

$$V = V_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}(f)$$

für die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ von f. Argumentieren Sie nun mit vollständiger Induktion, unter Verwendung von Aufgabe 2 oben und Aufgabe 3 auf Präsenzübungsblatt 6.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 8

In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass jedes Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum eine Norm definiert; siehe Lemma 3.4. Es entsteht jedoch nicht jede Norm auf diese Weise, wie die folgende Aufgabe zeigt.

Aufgabe 1.

(1) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\, , \,\rangle$ und zugehöriger Norm $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ die Gleichung
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$
gilt.

(2) Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ auf $\mathbb{R}^n$ durch
$$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$$
eine Norm definiert ist.

(3) Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ kein Skalarprodukt $\langle\, , \,\rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ existiert mit $\|x\|_\infty = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Hinweis: (1).

Aufgabe 2. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$
Bestimmen Sie, ohne das charakteristische Polynom von A zu berechnen, die Eigenwerte von A, sowie eine Basis des $\mathbb{R}^4$, die aus Eigenvektoren von A besteht. Bestimmen Sie damit eine orthogonale Matrix, die A diagonalisiert.

Aufgabe 3. Skizzieren Sie die reellen Lösungen der Gleichungen
$$3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 4,$$
$$3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 = 4,$$
und diskutieren Sie die prinzipiellen Unterschiede zwischen den beiden Lösungsmengen.

Bringen Sie beide Gleichungen auf die Normalform $xA_ix^{\mathrm{t}} = 4$ für symmetrische Matrizen $A_1, A_2 \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 9

Aufgabe 1. Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und

$$h : V \times V \to \mathbb{C}$$

eine hermite'sche Form. Zeigen sie, dass es eindeutig bestimmte $\mathbb{R}$-bilineare Abbildungen $f, g : V \times V \to \mathbb{R}$ gibt derart, dass

- f symmetrisch ist,
- g antisymmetrisch ist und
- für alle $x, y \in V$ die Identität $h(x, y) = f(x, y) + ig(x, y)$ gilt.

Aufgabe 2. (Transformationsformel für Strukturmatrizen von Sesquilinearformen)

Seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine $\mathbb{C}$-Basis von V, $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform auf V und $B := (\beta(b_i, b_j)) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ die Strukturmatrix von β bezüglich $\mathcal{B}$. Ist $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ eine weitere Basis von V mit zugehöriger Strukturmatrix C und $S = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ die Basiswechselmatrix, so gilt

$$C = S^{\mathrm{t}} B \overline{S}.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\langle\,,\rangle : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad (A, B) \mapsto \mathrm{Sp}(A\overline{B}^{\mathrm{t}})$$

ein Skalarprodukt auf dem komplexen Vektorraum $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ ist. Bestimmen Sie eine Orthonomalbasis von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ bezüglich $\langle\,,\rangle$.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 10

Aufgabe 1. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2. Auf dem Übungsblatt 3 hatten Sie gezeigt, dass die Abbildung

$$\phi : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf V ist. Bestimmen Sie den Endomorphismus von V, der zur formalen 'Ableitung'

$$\Delta : V \to V, \quad \sum_{i=0}^{2} a_i X^i \mapsto \sum_{i=1}^{2} a_i X^{i-1}$$

adjungiert ist bezüglich ϕ.

Aufgabe 2. Seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ und $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform derart, dass $\beta(b_i, b_j) > 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Folgt daraus, dass β ein Skalarprodukt ist? Geben Sie gegebenenfalls einen Beweis oder ein Gegenbeispiel. Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $n = 1$ und $n \geq 2$ separat.

Aufgabe 3. Seien V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $f, g \in \mathrm{End}(V)$ zwei selbstadjungierte Endormorphismen. Zeigen Sie: Genau dann ist $f \circ g$ selbstadjungiert, wenn $f \circ g = g \circ f$ gilt.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 11

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(1) Für jede Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist AA^* hermite'sch und positiv definit.
(2) Zu jeder positiv definiten hermite'schen Matrix $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ gibt es eine positiv definite hermite'sche Matrix $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $C^2 = B$.

Aufgabe 2. ("Polarzerlegung") Zu jedem $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ gibt es eine positiv definite hermite'sche Matrix P und eine unitäre Matrix $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ derart, dass

$$A = PU.$$

(Hinweis: Aufgabe 1.) Interpretieren Sie diese Zerlegung geometrisch.

Aufgabe 3. Sei $C_2 \subset \mathbb{R}^2$ die konvexe Hülle der Vektoren

$$e_1 + e_2, \quad e_1 - e_2, \quad -e_1 + e_2, \quad -e_1 - e_2.$$

Bestimmen Sie die Teilmenge $\mathcal{S}_2 \subset \mathrm{O}_2$ der orthogonalen Matrizen, die C_2 invariant lassen. Zeigen Sie, dass diese "Symmetriegruppe" $\mathcal{S}_2$ des Würfels C_2 eine Untergruppe der Gruppe O_2 der Ordnung 8 ist. Ist sie abelsch?

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2

Präsenzübungsblatt 12

In diesem Übungsblatt geht es um den sogenannten *Euklidischen*[1] *Algorithmus*. Sei R ein euklidischer Ring mit euklidischer Normfunktion $n : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$. Seien $a, b \in R$ mit $a \neq 0$, und $q, r \in R$ mit

$$b = qa + r, \quad q, r \in R, \quad r = 0 \text{ oder } n(r) < n(a).$$

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(b, a) = \mathrm{ggT}(a, r)$ gilt.

Definiere eine Folge $(r_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ von Elementen aus R wie folgt: Setze $r_0 = b, r_1 = a, r_2 = r$. Ist $r_i = 0$, so sei $r_{i+1} = 0$. Ist $r_i \neq 0$, so schreibe

$$r_{i-1} = q_i r_i + r_{i+1}, \quad q_i, r_{i+1} \in R, \quad n(r_{i+1}) < n(r_i).$$

(Beachten Sie, dass r_{i+1} dadurch *eindeutig* festgelegt ist.)

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $r_i = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Die Folge (r_i) "bricht also ab". Sei r_n das letzte von 0 verschiedene Element. Schreibe

$$\begin{aligned} r_0 = b = qa + r &= q_1 r_1 + r_2, \\ r_1 &= q_2 r_2 + r_3, \\ &\dots \\ r_{n-1} &= q_n r_n + 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass $r_n = \mathrm{ggT}(a, b)$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $R = \mathbb{Z}$ mit euklidischer Normfunktion $n = |\ |$. Benutzen Sie den euklidischen Algorithmus, um

$$d := \mathrm{ggT}(238, 35)$$

zu berechnen. Finden Sie ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit

$$238x + 35y = d.$$

[1]Euklid von Alexandria, ca. 360 v. Chr. bis ca. 280 v. Chr.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 13

Mit $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ definieren wir die *Gaußschen*[1] *Zahlen*

$$R := \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

und die *Normfunktion*

$$n : R \to \mathbb{N}_0, \quad a + ib \mapsto a^2 + b^2.$$

Aufgabe 1.

(1) Zeigen Sie: n ist eine Euklidische Normfunktion im Sinne von Definition 4.5 der Vorlesung. (Hinweis: Sind $x, y \in R$ mit $x \neq 0$ gegeben, versuchen Sie, die komplexe Zahl y/x durch eine Gaußsche Zahl q zu approximieren.)

(2) Die Gaußschen Zahlen bilden also ein euklidischer Ring. Bestimmen Sie die Einheitengruppe dieses Ringes.

Aufgabe 2.

(1) Bestimmen Sie die Invariantenteiler $c_1, c_2 \in R$ der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4i & 2-i \\ -1+2i & 3-2i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(R).$$

(2) Bestimmen Sie Matrizen $P, Q \in \mathrm{GL}_2(R)$ mit

$$PAQ = \mathrm{diag}(c_1, c_2).$$

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 3. Seien nun K ein beliebiger Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Zeigen Sie:

(1) Genau dann sind A und B äquivalent über K, wenn $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$.

(2) Ist $K = \mathbb{R}$ und sind A und B symmetrisch, so sind A und B genau dann konjugiert über $\mathbb{R}$, wenn $\chi_A = \chi_B$, d.h. wenn ihre charakteristischen Polynome übereinstimmen.

[1] Carl Friedrich Gauß, 1777 – 1855

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 14

Aufgabe 1. Seien K ein beliebiger Körper und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine Matrix in Jordanscher Normalform, mit Minimalpolynom $\mu_A(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \alpha_i)^{m_i}$. Hierbei seien $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A. Zeigen Sie:

(1) Für jedes $i = 1, \dots, s$ ist m_i die Größe des größten Jordanblocks von A zum Eigenwert α_i.

(2) Wenn A die Gestalt
$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
hat für Matrizen $B \in \mathrm{Mat}_j(K)$ und $C \in \mathrm{Mat}_{n-j}(K)$ für ein $j = 1, \dots, n$, dann gilt
$$\mu_A = \mathrm{kgV}(\mu_B, \mu_C),$$
das heisst das Minimalpolynom μ_A ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Minimalpolynome μ_B und μ_C.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen komplexer Matrizen A mit
$$\mathrm{rk}(A) = 4, \quad \mu_A(X) = X^3, \quad \chi_A(X) = X^7.$$

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
einmal als Element von $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ und einmal als Element von $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_2)$, wobei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen ist.

(1) Zeigen Sie, dass A in beiden Fällen konjugiert ist zu einer Matrix in Jordanscher Normalform. (Hinweis: Betrachten Sie das charakteristische Polynom.)

(2) Bestimmen Sie jeweils die Jordansche Normalformen.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 15

Es sei K ein beliebiger Körper.

Aufgabe 1. Seien $h_1, \ldots, h_m \in K[X]$ normierte, paarweise verschiedene Primpolynome und $1 \leq r_i \leq s_i$ natürliche Zahlen für $i = 1, \ldots, m$. Gibt es einen endlich-dimensionalen K-Vektorraum V und einen Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ mit Minimalpolynom $\mu_f = \prod_{i=1}^m h_i^{r_i}$ und charakteristischem Polynom $\chi_f = \prod_{i=1}^m h_i^{s_i}$?

Aufgabe 2. Sei $m \in \mathbb{N}$.

(1) Zeigen Sie: Für $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ und $S \in \operatorname{GL}_n(K)$ gilt
$$(SAS^{-1})^m = SA^mS^{-1}.$$

(2) Zeigen Sie: Für $A, B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ mit $AB = BA$ gilt
$$(A+B)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} A^i B^{m-i}.$$
Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Vertauschbarkeitsannahme im Allgemeinen notwendig ist.

(3) Sei
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{R}).$$
Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \operatorname{GL}_3(\mathbb{R})$ und Matrizen $D, N \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{R})$, wobei D diagonal und N nilpotent ist und $DN = ND$, derart, dass
$$A = S(D+N)S^{-1}.$$
Berechnen Sie – ohne die Hilfe eines Computers – die Matrix A^{50}.

Aufgabe 3. Seien
$$V := \{g \in \mathbb{C}[X] \mid \deg(g) < n\}$$
der n-dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexen Polynome vom Grad kleiner als n und $f \in \operatorname{End}(V)$ der Endomorphismus
$$f : V \to V, \quad g(X) \mapsto g(X+1).$$

(1) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte und -räume von f. Folgern sie, dass $\chi_f(X) = (X-1)^n$ das charakteristische Polynom von f ist und mit dem Minimalpolynom $\mu_f(X)$ übereinstimmt. Folgern Sie, dass V zyklisch bezüglich f ist. Finden Sie einen f-zyklischen Vektor $v \in V$?

(2) Ist f bezüglich einer geeigneten Basis von V durch eine Matrix in Jordanscher Normalform darstellbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine solche Matrix.