DIE KUBISCHE RESOLVENTE

ANNA FLÖTOTTO

Bachelorarbeit

vorgelegt von
Anna Flötotto

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Oktober 2007

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In dieser Arbeit wollen wir uns mit Auflösungsformeln für Gleichungen vom Grad 4, der Form

$$z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0$$

beschäftigen. Dazu brauchen wir einige Definitionen und Sätze. Insbesondere die symmetrischen Funktionen und den Hauptsatz der Galoistheorie werden wir in dieser Arbeit benutzen und in Kapitel 2 nochmal kurz zusammenfassen.

Anschließend werden wir in Kapitel 3 die zugrunde liegende Theorie für Gleichungen n-ten Grades, der Form

$$z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n = 0$$

herleiten, auf die wir uns dann im folgenden beziehen wollen. Allgemein wird es darum gehen diese allgemeine Gleichung auf eine andere Gleichung mit elementarsymmetrischen Funktionen als Koeffizienten zurück zu führen, so dass wir dann die Galoistheorie nutzen können um die Auflösungsformeln zu beweisen.

Bevor wir uns dann mit Gleichungen 4-ten Grades befassen, behandeln wir in Kapitel 4 noch Gleichungen 3-ten Grades der Form

$$z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$$

und entwickeln die „*Auflösungsformeln von* CARDANO“. Diese Formeln gebrauchen wir nachher um den Beweis der Auflösungsformeln für Gleichungen vom Grad 4 zu vereinfachen.

Das zentrale Kapitel in dieser Arbeit ist jedoch das Kapitel 5, in dem wir uns mit zwei verschiedenen Auflösungsformeln für Gleichungen vom Grad 4 beschäftigen wollen.

In beiden behandelten Varianten führen wir die Gleichung 4. Grades durch Substitution auf die Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

zurück und betrachten dann die Gleichung

$$\Theta^3 - t_1\Theta^2 + t_2\Theta - t_3 = 0$$

und ihre Wurzeln Θ_i.

In Variante 1 wählen wir:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \\ \Theta_2 &= (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) \\ \Theta_3 &= (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) \end{aligned}$$

und erhalten dann für obige Gleichung, mit Hilfe der elementarsymmetrischen Funktionen:

$$\Theta^3 - 2p\Theta^2 + (p^2 - 4r)\Theta + q^2 = 0.$$

Diese Gleichung können wir dann durch Radikale auflösen.

In Variante 2 wählen wir:

$$\Theta_1 = \frac{x_1x_2 - x_3x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}$$
$$\Theta_2 = \frac{x_1x_3 - x_2x_4}{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}$$
$$\Theta_3 = \frac{x_1x_4 - x_2x_3}{x_1 - x_2 - x_3 + x_4}$$

Die Besonderheit der Θ_i, wie wir sie in Variante 2 wählen, ist die Invarianz über

$$x_i \to ax_i + b.$$

Wir erhalten dann wiederum für die obige Gleichung, mit Hilfe der elementarsymmetrischen Funktionen:

$$\Theta^3 - \frac{p^2 - 4r}{2q}\Theta^2 - \frac{1}{2}p\Theta - \frac{4pr - q^2}{8q} = 0.$$

Auch diese Gleichung kann durch Radikale aufgelöst werden und wir haben mit dieser Formel eine weitere Auflösungsformel für Gleichungen 4-ten Grades gefunden.

Die Variante 1 ist die klassische Methode zur Auflösung von Gleichungen 4-ten Grades, wie sie in der Literatur zu finden ist.

Variante 2 ist bisher noch nicht in der Literatur zu finden, die Behauptung dass die Θ_i entsprechend gewählt werden können wird in dieser Arbeit bewiesen. Die dazugehörigen Rechnungen wurden im Rahmen dieser Bachelorarbeit aufgestellt.

2. Voraussetzungen

Sei R ein Ring mit Einselement. Ein Polynom aus $R[x_1, \dots, x_n]$, das bei jeder beliebigen Permutation der Unbestimmten $x_1, \dots, x_n$ in sich übergeht, heißt eine *(ganze rationale) symmetrische Funktion der Variablen* $x_1, \dots, x_n$.

Betrachten wir:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= (z - x_1)(z - x_2) \cdots (z - x_n) \\
&= z^n - \sigma_1 z^{n-1} - + \ldots + (-1)^n \sigma_n
\end{aligned} \tag{1}
$$

mit z als Unbestimmte, so erhalten wir als Koeffizienten der Potenzen von z:

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\
\sigma_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n \\
\sigma_3 &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n \\
&\vdots \\
\sigma_n &= x_1 x_2 \cdots x_n
\end{aligned}
$$

offensichtlich symmetrische Funktionen, da die linke und damit auch die rechte Seite von (1) unter Permutationen der x_i unverändert bleibt.

Die $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ werden *elementarsymmetrische Funktionen von* $x_1, \dots, x_n$ genannt.

Man kann folgern, dass jedes Polynom $\phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, wenn man die σ_i durch ihre Ausdrücke in den x_i ersetzt, eine symmetrische Funktion der $x_1, \dots, x_n$ ergibt.

Damit erhalten wir als Hauptsatz über symmetrische Funktionen:

Jede ganzrationale symmetrische Funktion aus $R[x_1, \dots, x_n]$ lässt sich als Polynom $\phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ schreiben.

Weiterhin gilt die Eindeutigkeit der Darstellung durch symmetrische Funktionen, denn:

Jedes symmetrische Polynom aus $R[x_1, \dots, x_n]$ lässt sich auf genau eine Art als Polynom in $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ schreiben:
Sind $\phi_1(y_1, \dots, y_n)$ und $\phi_2(y_1, \dots, y_n)$ zwei Polynome in den Unbestimmten $y_1, \dots, y_n$ und ist

$$\phi_1(y_1, \dots, y_n) \neq \phi_2(y_1, \dots, y_n)$$

so ist

$$\phi_1(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \neq \phi_2(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

Neben den symmetrischen Funktionen ist für diese Arbeit insbesondere der Hauptsatz der Galoistheorie notwendig.

Eine endliche Körperwerweiterung Σ eines Körpers K heißt *Galoiserweiterung*, falls sie separabel und normal ist. Unter *separabel* verstehen wir, dass jedes Element der Körpererweiterung separabel, also Nullstelle eines separablen Polynoms ist. Ein Polynom wiederum nennen wir separabel, wenn die irreduziblen Faktoren nur einfache Nullstellen haben. Eine Körpererweiterung nennen wir *normal*, wenn jedes irreduzible Polynom, welches eine Nullstelle in einer Erweiterung besitzt, in dieser in Linearfaktoren zerfällt. Ebenso gilt, dass eine Körpererweiterung normal ist, wenn sie ein Zerfällungskörper eines Polynoms ist.

Sei K Körper und Σ eine endliche Galoiserweiterung von K, dann gilt:

(1) Zu jedem Zwischenkörper Δ, $K \subseteq \Delta \subseteq \Sigma$, gehört eine Untergruppe U der Galoisschen Gruppe $\mathcal{G}$, nämlich die Gesamtheit derjenigen Automorphismen von Σ, die alle Elemente von Δ festlassen.
(2) Δ ist auch durch U eindeutig bestimmt; Δ ist nämlich die Gesamtheit derjenigen Elemente von Σ, welche die Substitution von U „gestatten“, d.h. bei ihnen invariant bleiben, also gilt $\Delta = \Sigma^U$
(3) Zu jeder Untergruppe U von $\mathcal{G}$ kann man einen Körper Δ finden, der zu U in der erwähnten Beziehung steht.
(4) Die Ordnung von U ist gleich dem Grad von Σ in Bezug auf Δ; der Index von U in $\mathcal{G}$ ist gleich dem Grad von Δ in Bezug auf K.
(5) Δ ist über K genau dann galoisch, wenn U Normalteiler von G ist.

Bevor wir uns mit den Auflösungsformeln der allgemeinen Gleichung vom Grad 4 beschäftigen, müssen wir die allgemeine Gleichung vom Grad n betrachten. In Kapitel 4 werden wir mit Hilfe der Galoistheorie allgemeine Vorüberlegungen zur Auflösbarkeit von Gleichungen aufstellen und somit die wichtigen Grundvoraussetzungen für die späteren Beweise schaffen.

Außerdem betrachten wir die Auflösbarkeit von Gleichungen vom Grad 3, damit wir dann die Auflösbarkeit der Gleichungen vom Grad 4 auf diese zurückführen können.

3. Die allgemeine Gleichung n-ten Grades

Bevor wir uns mit dem Spezialfall der Gleichung vom Grad 4 befassen, müssen wir einige Vorüberlegungen zur allgemeinen Gleichung n-ten Grades betrachten. Unter der allgemeinen Gleichung n-ten Grades verstehen wir eine Gleichung der Form

$$z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n = 0 \tag{2}$$

mit unbestimmten Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$, welche dem Grundkörper K adjungiert werden.

Angenommen ihre Wurzeln sind $b_1, \ldots, b_n$, dann gilt:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 + b_2 + \ldots + b_n \\ a_2 &= b_1 b_2 + b_1 b_3 + \ldots + b_{n-1} b_n \\ &\vdots \\ a_n &= b_1 b_2 \cdots b_n \end{aligned}$$

Die allgemeine Gleichung (2) wollen wir nun mit einer anderen vergleichen, deren Wurzeln Unbestimmte $x_1, \ldots, x_n$ sind und deren Koeffizienten (nach obiger Annahme) die elementarsymmetrischen Funktionen σ_i dieser Unbestimmten sind:

$$\begin{aligned} &z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} - + \ldots + (-1)^n \sigma_n \\ &= (z - x_1)(z - x_2) \cdots (z - x_n) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

mit

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ \sigma_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n \\ &\vdots \\ \sigma_n &= x_1 x_2 \cdots x_n \end{aligned}$$

Das Polynom (3) ist separabel und hat, in Bezug auf den Körper $K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, als Galoissche Gruppe die symmetrische Gruppe aller Permutationen der x_i. Dies funktioniert, weil jede solche Permutation einen Automorphismus des Körpers $K(x_1, \ldots, x_n)$ darstellt, der die symmetrischen Funktionen $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ und somit auch alle Elemente des Körpers $K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ invariant lässt.

Da die σ_i symmetrisch sind, ist $K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ ein Unterkörper der Menge der Polynome in $K(x_1, \ldots, x_n)$ für die gilt:

$$f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n),$$

mit π Permutation, $\pi \in S_n$. Das Polynom

$$f(x) := \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \in K(x_1, \ldots, x_n)[z]$$

liegt nach der Entwicklung der elementarsymmetrischen Funktionen in $K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)[z]$ und zerfällt über $K(x_1, \ldots, x_n)$ ganz in Linearfaktoren. Also gehört jede Funktion der $x_1, \ldots, x_n$, die unter Permutationen der Gruppe invariant bleibt, dem Körper $K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ an. Daraus folgt, dass jede symmetrische Funktion der x_i rational durch $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ausdrückbar ist.

Dies beweist einen Teil des „Hauptsatzes über symmetrische Funktionen“ mit Hilfe der Galoisschen Theorie.

Ebenso erhält man mit Hilfe der Galoisschen Theorie den „Eindeutigkeitssatz“, also die Tatsache dass keine Relation $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0$ bestehen kann, wenn nicht das Polynom f selbst identisch verschwindet, problemlos wieder.

Nehmen wir nun an, dass gilt:

$$f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{\substack{i=1\\ j>i}}^{n} x_i x_j, \ldots, x_1 x_2 \cdots x_n\Big) = 0$$

so würde diese Relation beim Einsetzen der Wurzeln b für die Unbestimmten x_i bestehen bleiben. Es gilt also:

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i, \sum_{\substack{i=1\\ j>i}}^{n} b_i b_j, \ldots, b_1 b_2 \cdots b_n\Big) = 0$$

oder

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

Damit erhalten wir, dass f identisch verschwinden würde.

Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt, dass die Zuordnung

$$f(b_1, \ldots, b_n) \quad \mapsto \quad f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

nicht nur ein Homomorphismus, sondern ein Isomorphismus der Ringe $K[a_1, \ldots, a_n]$ und $K[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ ist. Diese Abbildung können wir zu einem Isomorphismus der Quotientenkörper $K(a_1, \ldots, a_n)$ und $K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ und sogar zu einem Isomorphismus der Nullstellenkörper $K(b_1, \ldots, b_n)$ und $K(x_1, \ldots, x_n)$ erweitern. Hierbei gehen die b_i in irgendeiner Reihenfolge über in die x_k. Da die x_i permutierbar sind, können wir jedoch auch jedes b_i in x_i übergehen lassen.

Damit haben wir bewiesen:

Es gibt einen Isomorphismus

$$K(b_1, \ldots, b_n) \cong K(x_1, \ldots, x_n)$$

der jedes b_i in x_i und jedes a_i in σ_i überführt.

Mit Hilfe dieses Isomorphismus können wir alle Sätze über die Gleichung (3) unmittelbar auf die Gleichung (2) übertragen.

Insbesondere erhalten wir daraus:

Die allgemeinde Gleichung (2) ist separabel und hat in Bezug auf ihren Koeffizientenkörper $K(a_1, \ldots, a_n)$ als Galoissche Gruppe die symmetrische Gruppe. Der Grad ihres Zerfällungskörpers ist $n!$.

Im Folgenden setzen wir

$$K(a_1, \ldots, a_n) = \Delta$$
$$K(b_1, \ldots, b_n) = \Sigma$$

und bezeichnen die symmetrische Gruppe mit $\mathcal{S}_n$. Die symmetrische Gruppe besitzt immer eine Untergruppe vom Index 2, die alternierende Gruppe $\mathcal{A}_n$ mit $\mathcal{A}_n = \{\sigma \in S_n | sgn(\sigma) = 1\}$.
Der zugehörige Zwischenkörper Λ hat den Grad 2 und wird von jeder Funktion der b_i erzeugt, welche Substitutionen der $\mathcal{A}_n$, aber nicht der $\mathcal{S}_n$ gestattet.

Eine Funktion mit dieser Eigenschaft ist, falls $char(K) \neq 2$ gilt, das Differenzprodukt

$$\prod_{i<k} (b_i - b_k) = \sqrt{D}$$

wobei die Diskriminante der Gleichung (2) dessen Quadrat ist,

$$D = \prod_{i<k} (b_i - b_k)^2$$

Da die Diskriminante eine symmetrische Funktion ist, ist sie also ein Polynom in den a_i.

Somit erhalten wir den Körper Λ in der Form

$$\Lambda = \Delta(\sqrt{D})$$

Für $n > 4$ ist die Gruppe $\mathcal{A}_n$ einfach und somit ist:

$$\mathcal{S}_n \supset \mathcal{A}_n \supset \mathcal{F} \tag{4}$$

eine Kompositionsreihe, mit $\mathcal{F}$ als triviale Gruppe. Die Gruppe $\mathcal{S}_n$ ist also für $n > 4$ nicht auflösbar.

Daraus folgt:

Satz 3.1 (Satz von Abel)**.** *Die allgemeine Gleichung n-ten Grades ist für $n > 4$ nicht durch Radikale lösbar.*

Die Kompositionsfaktoren in (4) sind für $n = 2$ und $n = 3$ zyklisch. Für $n = 2$ gilt sogar $\mathcal{A}_n = \mathcal{F}$; für $n = 3$ haben die Faktoren die Ordnung 2 und 3. Für $n = 4$ hat man mit der „Kleinschen Vierergruppe“ ($\mathcal{K}_4$) (in Zykelschreibweise):

$$\{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

und $\mathcal{E}_2$, welche irgendeine ihrer Untergruppen der Ordnung 2 ist, die Kompositionsreihe

$$\mathcal{S}_n \supset \mathcal{A}_n \supset \mathcal{K}_4 \supset \mathcal{E}_2 \supset \mathcal{F} \tag{5}$$

Die Ordnung der Kompositionsfaktoren sind

$$1, \quad 3, \quad 2, \quad 2$$

Auf diesen Tatsachen beruhen die in den nächsten Kapiteln behandelten Auflösungsformeln der Gleichungen 2., 3. und 4. Grades.

4. Auflösungsformel für Gleichungen 3. Grades

Als Auflösungsformel für Gleichungen 2. Grades, $x^2 + px + q = 0$ ist uns die *pq-Formel*

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

bekannt.

Auch für Gleichungen vom Grad 3 kennen wir eine Auflösungsformel, die wir im Folgenden herleiten wollen um dann im Fall von Gleichungen 4. Grades auf diese Ergebnisse zurückgreifen zu können.

Die allgemeine Gleichung 3. Grades

$$z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$$

können wir durch Substitution von

$$z = x - \frac{1}{3} a_1$$

auf die Gestalt

$$x^3 + px + q = 0$$

bringen. Dabei setzen wir voraus, dass $char(K) \neq 2$ und $char(K) \neq 3$.

Entsprechend der Kompositionsreihe

$$\mathcal{S}_3 \supset \mathcal{A}_3 \supset \mathcal{F}$$

adjungieren wir zunächst das Differenzprodukt der Wurzeln:

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) &= \sqrt{D} \\ &= \sqrt{-4p^3 - 27q^2}\end{aligned}$$

Durch diese Adjunktion erhalten wir einen Körper $\Delta(\sqrt{D})$, mit $\Delta = K(a_1, a_2, a_3)$ bezogen auf den die Gleichung die Gruppe $\mathcal{A}_3$ hat, also eine zyklische Gruppe der Ordnung 3.

Entsprechend der allgemeinen Theorie der „Auflösung von Gleichungen durch Radikale“ adjungieren wir zunächst die dritten Einheitswurzeln:

$$(6) \qquad \begin{cases} \varrho &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} \\ \varrho^2 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} \end{cases}$$

und betrachten anschließend die Lagrangeschen Resolventen:

$$(7) \qquad \begin{cases} (1, x_1) &= x_1 + x_2 + x_3 \\ (\varrho, x_1) &= x_1 + \varrho x_2 + \varrho^2 x_3 \\ (\varrho^2, x_1) &= x_1 + \varrho^2 x_2 + \varrho x_3 \end{cases}$$

Wir müssen die dritten Potenzen dieser Größen rational durch $\sqrt{-3}$ und $\sqrt{D}$ ausdrücken können. Wir erhalten so:

$$\begin{aligned}(\varrho, x_1)^3 = {} & x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \\ & + 3\varrho x_1^2 x_2 + 3\varrho x_2^2 x_3 + 3\varrho x_3^2 x_1 \\ & + 3\varrho^2 x_1 x_2^2 + 3\varrho^2 x_2 x_3^2 + 3\varrho^2 x_3 x_1^2 \\ & + 6 x_1 x_2 x_3\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\varrho^2, x_1)^3 = {} & x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \\ & + 3\varrho x_1 x_2^2 + 3\varrho x_2 x_3^2 + 3\varrho x_3 x_1^2 \\ & + 3\varrho^2 x_1^2 x_2 + 3\varrho^2 x_2^2 x_3 + 3\varrho^2 x_3^2 x_1 \\ & + 6 x_1 x_2 x_3\end{aligned}$$

Wenn wir nun (6) in diese beiden Gleichungen einsetzen und beachten, dass gilt:

$$\begin{aligned}\sqrt{D} &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \\ &= x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 - x_1 x_2^2 - x_2 x_3^2 - x_3 x_1^2\end{aligned}$$

dann folgt:

$$\begin{aligned}(\varrho, x_1) &= \sum_{i=1}^{3} x_i - \frac{3}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{3} x_i x_j + 6 x_1 x_2 x_3 + \frac{3}{2}\sqrt{-3}\sqrt{D} \\ (\varrho^2, x_1) &= \sum_{i=1}^{3} x_i - \frac{3}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{3} x_i x_j + 6 x_1 x_2 x_3 - \frac{3}{2}\sqrt{-3}\sqrt{D}\end{aligned}$$

Wir können die auftretenden symmetrischen Funktionen durch elementarsymmetrische Funktionen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, also die Koeffizienten der allgemeinen Gleichung ausdrücken.

Es gilt:

$$\begin{aligned}\sigma_1^3 &= \sum_{i=1}^{3} x_i^3 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ j\neq i}}^{3} x_i^2 x_j + 6 x_1 x_2 x_3 && =0 \\ -\frac{9}{2}\sigma_1\sigma_2 &= -\frac{9}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j\neq i}}^{3} x_i^2 x_j - \frac{27}{2} x_1 x_2 x_3 && =0 \\ \frac{27}{2}\sigma_3 &= \frac{27}{2} x_1 x_2 x_3 && =-\frac{27}{2} q\end{aligned}$$

Aufsummieren der obigen Gleichungen ergibt:

$$-\frac{27}{2}q = \sum_{i=1}^{3} x_i^3 - \frac{3}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{3} x_i^2 x_j + 6x_1x_2x_3$$

Einsetzen liefert:

$$(\varrho, x_1)^3 = -\frac{27}{2}q + \frac{3}{2}\sqrt{-3}\sqrt{D}$$

und

$$(\varrho^2, x_1)^3 = -\frac{27}{2}q - \frac{3}{2}\sqrt{-3}\sqrt{D}$$

Die beiden kubischen Irrationalitäten (ϱ, x_1) und (ϱ^2, x_1) sind also nicht unabhängig, und es gilt:

$$\begin{aligned}(\varrho, x_1)(\varrho^2, x_1) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (\varrho + \varrho^2)x_1x_2 + (\varrho + \varrho^2)x_1x_3\\ &\quad + (\varrho + \varrho^2)x_2x_3\\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3\end{aligned}$$

Somit müssen wir die Kubikwurzeln

$$(8)\qquad \begin{cases} (\varrho, x_1) &= \sqrt[3]{-\frac{27}{2}q + \frac{3}{2}\sqrt{-3D}}\\ (\varrho^2, x_1) &= \sqrt[3]{-\frac{27}{2}q - \frac{3}{2}\sqrt{-3D}}\end{cases}$$

so bestimmen, dass gilt:

$$(9)\qquad (\varrho, x_1)(\varrho^2, x_1) = -3p$$

Um die Wurzeln x_1, x_2, x_3 auszurechnen, multiplizieren wir die Gleichung (7) der Reihe nach mit $1, 1, 1$, bzw. $1, \varrho^2, \varrho$, bzw. $1, \varrho, \varrho^2$ und addieren sie.

Damit erhalten wir:

$$(10)\qquad \begin{cases} 3x_1 &= (\varrho, x_1) + (\varrho^2, x_1)\\ 3x_2 &= \varrho^2(\varrho, x_1) + \varrho(\varrho^2, x_1)\\ 3x_3 &= \varrho(\varrho, x_1) + \varrho^2(\varrho^2, x_1)\end{cases}$$

Die Formeln (8), (9), (10) sind die „*Auflösungsformeln von* CARDANO“, sie gelten aufgrund ihrer Herleitung nicht nur für die “allgemeine“ sondern auch für jede spezielle kubische Gleichung.

5. Auflösungsformel für Gleichungen 4. Grades

In dem folgenden Kapitel wollen wir zwei mögliche Auflösungsformeln für Gleichungen 4. Grades herleiten. Dabei werden wir uns auf die vorhergehenden Kapitel beziehen.

5.1. **Vorraussetzungen.** Die allgemeine Gleichung 4. Grades

$$z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0$$

können wir durch Substitution

$$z = x - \frac{1}{4} a_1$$

in

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

transformieren. Wir betrachten die Kompositionsreihe

$$\mathcal{S}_4 \supset \mathcal{A}_4 \supset \mathcal{K}_4 \supset \mathcal{E}_2 \supset \mathcal{F}$$

Diese Kompostionsreihe haben wir im Kapitel 3 bereits mittels Galoistheorie entwickelt, jedoch für den allgemeinen Fall vom Grad n (siehe (5)). $\mathcal{F}$ ist wieder die einfache Gruppe.

Zu dieser Kompositionsreihe gehört eine Reihe von Körpern

$$\Delta \subset \Delta(\sqrt{D}) \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \Sigma$$

Wobei D, wie in Kapitel 3 definiert, die Diskriminante der allgemeinen Gleichung ist.

Im Folgenden gilt, dass die Laufindizes i, j, k, l aus der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ sind.

5.2. **Variante 1.** Im Folgenden gilt: $char(\Delta) \neq 2$ und $char(\Delta) \neq 3$. Wie zu sehen ist, ist die explizite Bestimmung von D nicht nötig. Durch eine Größe, welche die Substitutionen von $\mathcal{K}_4$, aber nicht die von $\mathcal{A}_4$ gestattet, wird der Körper Λ_1 aus $\Delta(\sqrt{D})$ erzeugt. Eine solche Größe ist

$$\Theta_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$$

Außer den Substitutionen von $\mathcal{K}_4$ gestattet diese Größe noch die folgenden (in Zykelschreibweise):

$$(12), (34), (1324), (1423)$$

welche zusammen mit $\mathcal{K}_4$ eine Gruppe der Ordnung 8 bilden. In Bezug auf Δ hat diese Größe drei verschiedene Konjugierte, in die sie durch

Substitutionen von $\mathcal{S}_4$ überführt werden kann:

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= (x_1+x_2)(x_3+x_4)\\ \Theta_2 &= (x_1+x_3)(x_2+x_4)\\ \Theta_3 &= (x_1+x_4)(x_2+x_3)\end{aligned}$$

Diese Größen wiederum sind Wurzeln der folgenden Gleichung 3. Grades:

$$\Theta^3 - t_1\Theta^2 + t_2\Theta - t_3 = 0 \tag{11}$$

Die t_i dieser Gleichung sind die elementarsymmetrischen Funktionen der Θ_1, Θ_2, Θ_3:

$$\begin{aligned}t_1 &= \Theta_1+\Theta_2+\Theta_3\\ &= 2\sum_{j>i} x_i x_j\\ &= 2p\\ t_2 &= \sum_{j>i}\Theta_i\Theta_j\\ &= \sum_{j>i} x_i^2x_j^2 + 3\sum_{\substack{i\neq j,k\\ k>j}} x_i^2x_jx_k + 6x_1x_2x_3x_4\\ t_3 &= \Theta_1\Theta_2\Theta_3\\ &= \sum_{\substack{j\neq i\\ k\neq i,j}} x_i^3x_j^2x_k + 2\sum_{\substack{i\neq j,k,l\\ l>k>j}} x_i^3x_jx_kx_l + 2\sum_{k>j>i} x_i^2x_j^2x_k^2 + 4\sum_{\substack{i,j\neq k,l\\ j>i,l>k}} x_i^2x_j^2x_kx_l\end{aligned}$$

Wir können t_1 in diesem Fall direkt als symmetrische Funktion angeben, t_2 und t_3 können wir durch die elementarsymmetrischen Funktionen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ der x_i ausdrücken. Es gilt:

$$\begin{aligned}\sigma_2^2 &= \sum_{j>i} x_i^2x_j^2 + 2\sum_{\substack{i\neq j,k\\ k>j}} x_i^2x_jx_k + 6x_1x_2x_3x_4\\ \sigma_1\sigma_3 &= \sum_{\substack{i\neq j,k\\ k>j}} x_i^2x_jx_k + 4x_1x_2x_3x_4\\ -4\sigma_4 &= -4x_1x_2x_3x_4\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} t_2 &= \sum_{j>i} x_i^2 x_j^2 + 3 \sum_{\substack{i\neq j,k\\ k>j}} x_i^2 x_j x_k + 6x_1x_2x_3x_4 \\ &= \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 \\ &= p^2 - 4r \end{aligned}$$

Ebenso gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2\sigma_3 &= \sum_{\substack{k\neq i,j\\ j>i}} x_i^2x_j^2x_k + 3\sum_{\substack{i\neq j,k,l\\ l>k>j}} x_i^3x_jx_kx_l + 3\sum_{k>j>i} x_i^2x_j^2x_k^2 + 8\sum_{\substack{i,j\neq k,l\\ j>i,l>k}} x_i^2x_j^2x_kx_l \\ -\sigma_1^2\sigma_4 &= -\sum_{\substack{i\neq j,k,l\\ l>k>j}} x_i^3x_jx_kx_l - 2\sum_{\substack{i,j\neq k,l\\ j>i,l>k}} x_i^2x_j^2x_kx_l \\ -\sigma_3^2 &= -\sum_{k>j>i} x_i^2x_j^2x_k^2 - 2\sum_{\substack{i,j\neq k,l\\ j>i,l>k}} x_i^2x_j^2x_kx_l \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} t_3 = &\sum_{\substack{j\neq i\\ k\neq i,j}} x_i^3x_j^2x_k + 2\sum_{\substack{i\neq j,k,l\\ l>k>j}}^{4} x_i^3x_jx_kx_l + 2\sum_{k>j>i} x_i^2x_j^2x_k^2 + 4\sum_{\substack{i,j\neq k,l\\ j>i,l>k}} x_i^2x_j^2x_kx_l \\ = &\,\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1^2\sigma_4 - \sigma_3^2 \\ = &-q^2 \end{aligned}$$

Somit können wir die Gleichung (11) angeben mit:

$$\Theta^3 - 2p\Theta^2 + (p^2-4r)\Theta + q^2 = 0 \tag{12}$$

Diese Gleichung nennt man die *kubische Resolvente* der Gleichung 4. Grades. Nach „CARDANO“ können wir ihre Wurzeln Θ_1, Θ_2, Θ_3 durch Radikale ausdrücken. Nun können wir auch sehen, dass die explizite Bestimmung von D tatsächlich nicht nötig ist, denn:

Wie schon bemerkt, gilt: $\Delta \subset K(\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3)$. Da K_4 die Θ_i invariant lässt und die Invarianten in Σ unter der Galoisuntergruppe K_4 Λ_1 ist, ist per Definition $\Lambda_1 = \Sigma^{K_4}$. Wobei gilt: $\Sigma = K(b_1,b_2,b_3,b_4)$ und $\Sigma^{K_4} = \{a\in\Sigma|\sigma(a) = a \quad \forall a \in K_4\}$. Damit haben wir gezeigt, dass $\Theta_i \in \Lambda_1$. Wir erhalten somit die Körperkette

$$\Delta \subset K(\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3) \subset \Lambda_1 \subset \Sigma$$

Σ/Δ ist eine Galoiserweiterung mit der Galoisgruppe S_4. Damit folgt aus dem Hauptsatz der Galoistheorie, dass für eine Untergruppe:

$$S_4 \supset U \supset K_4$$

gilt:

$$K(\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3) = \Sigma^U$$

Wobei analog zu vorher gilt: $\Sigma^U = \{a \in \Sigma | \sigma(a) = a \quad \forall a \in U\}$ Wir wollen nun noch zeigen, dass gilt:

$$K(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) = \Lambda_1$$

Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie reicht es hierfür zu zeigen, dass gilt: $U = K_4$.

$K_4 \subset U$ ist uns bereits bekannt. Sei nun $\sigma \in U$ und wir zeigen, dass $\sigma \in K_4$. σ lässt nach Definition von U, alle drei Θ_i fest. Damit folgt direkt die Behauptung, dass $\sigma \in K_4$, denn keine andere Permutation außer K_4 lässt alle drei Θ_i fest.

Also gilt: $U = K_4$ und somit auch:

$$K(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) = \Lambda_1$$

Der Körper Λ_2 wiederum entsteht aus Λ_1 durch Adjunktion einer Größe, die nicht alle vier Substitutionen von $\mathcal{K}_4$ sondern beispielsweise nur das Einselement und die Substitution (12)(34) gestattet. Eine solche Größe ist $x_1 + x_2$. Wir haben:

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = \Theta_1$$

und wir wissen bereits

$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = 0$$

daher gilt etwa:

$$x_1 + x_2 = \sqrt{-\Theta_1}; \quad x_3 + x_4 = -\sqrt{-\Theta_1}$$

Auf gleiche Weise erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= \sqrt{-\Theta_2}; \quad x_2 + x_4 = -\sqrt{-\Theta_2} \\ x_1 + x_4 &= \sqrt{-\Theta_3}; \quad x_2 + x_3 = -\sqrt{-\Theta_3} \end{aligned}$$

Diese drei Irrationalitäten sind nicht unabhängig; es gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{-\Theta_1} \cdot \sqrt{-\Theta_2} \cdot \sqrt{-\Theta_3} &= (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) \\ &= x_1^3 + x_2^2(x_2 + x_3 + x_4) + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \\ &= x_1^2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + \sum_{k>j>i} x_ix_jx_k \\ &= \sum_{k>j>i} x_ix_jx_k \\ &= -q \end{aligned}$$

Da $\mathcal{K}_4 \simeq \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$ die Ordnung 4 hat und eine Untergruppe der Ordnung 2 besitzt, brauchen wir genau zwei quadratische Irrationalitäten um von $\mathcal{K}_4$ zu $\mathcal{F}$ hinunter- oder von Λ zu Σ hinaufzusteigen. Die x_i lassen sich tatsächlich durch die drei Größen Θ (welche schon von zweien unter ihnen abhängen) rational bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
2x_1 &= \sqrt{-\Theta_1} + \sqrt{-\Theta_2} + \sqrt{-\Theta_3},\\
2x_2 &= \sqrt{-\Theta_1} - \sqrt{-\Theta_2} - \sqrt{-\Theta_3},\\
2x_3 &= -\sqrt{-\Theta_1} + \sqrt{-\Theta_2} - \sqrt{-\Theta_3},\\
2x_4 &= -\sqrt{-\Theta_1} - \sqrt{-\Theta_2} + \sqrt{-\Theta_3},
\end{aligned}$$

Dies sind genau die Auflösungsformeln der allgemeinen Gleichung 4. Grades. Aufgrund ihrer Herleitung gelten sie auch für jede spezielle Gleichung 4. Grades.

5.3. **Variante 2.** Als zweite Variante können wir die Θ_i auch wie folgt wählen:

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= \frac{x_1x_2 - x_3x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}\\
\Theta_2 &= \frac{x_1x_3 - x_2x_4}{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}\\
\Theta_3 &= \frac{x_1x_4 - x_2x_3}{x_1 - x_2 - x_3 + x_4}
\end{aligned}$$

Diese Größen sind ebenfalls Wurzeln einer Gleichung 3. Grades

$$\Theta^3 - t_1\Theta^2 + t_2\Theta - t_3 = 0 \tag{13}$$

Wobei die b_i die elementarsymmetrischen Funktionen von Θ_1, Θ_2, Θ_3 sind.

$$\begin{aligned}
t_1 &= \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 \qquad (14)\\
&= \frac{\sum_{j\neq i} x_i^3x_j - 2\sum_{j>i} x_i^2x_j^2 - \sum_{\substack{j,k\neq i\\ k>j}} x_i^2x_jx_k + 12x_1x_2x_3x_4}{\sum x_i^3 - \sum_{j\neq i} x_i^2x_j + 2\sum_{k>j>i} x_ix_jx_k}\\
t_2 &= \sum_{j\neq i} \Theta_i\Theta_j \qquad (15)\\
&= \frac{\sum_{\substack{i\neq j,k\\ k>j}} x_i^3x_jx_k - 2\sum_{\substack{k\neq i,j\\ j>i}} x_i^2x_j^2x_k + 3\sum_{\substack{i\neq j,k,l\\ l>k>j}} x_i^2x_jx_kx_l}{\sum x_i^3 - \sum_{j\neq i} x_i^2x_j + 2\sum_{k>j>i} x_ix_jx_k}\\
t_3 &= \Theta_1\Theta_2\Theta_3 \qquad (16)\\
&= \frac{\sum_{k>j>i} x_i^2x_j^2x_k^2 + \sum_{\substack{i\neq j,k,l\\ l>k>j}} x_i^3x_jx_kx_l}{\sum x_i^3 - \sum_{j\neq i} x_i^2x_j + 2\sum_{k>j>l} x_ix_jx_k}
\end{aligned}$$

Die t_i können wir durch die elementarsymmetrischen Funktionen von σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 der x_i ausdrücken:

Wir berechnen zunächst den Zähler von (14)

$$\sigma_1^2\sigma_2 = \sum_{j\neq i} x_i^3 x_j + 2\sum_{j>i} x_i^2 x_j^2 + 5\sum_{\substack{i\neq j,k\\ k>j}} x_i^2 x_j x_k + 12x_1x_2x_3x_4$$

$$-4\sigma_2^2 = -4\sum_{j>i} x_i^2 x_j^2 - 8\sum_{\substack{i\neq j,k\\ k>j}} x_i^2 x_j x_k - 24x_1x_2x_3x_4$$

$$2\sigma_1\sigma_3 = 2\sum_{\substack{i\neq j,k\\ k>j}} x_i^2 x_j x_k + 8x_1x_2x_3x_4$$

$$16\sigma_4 = 16x_1x_2x_3x_4$$

Aufsummieren der obigen Gleichungen liefert:

$$\begin{aligned}&\sum_{j\neq i} x_i^3 x_j - 2\sum_{j>i} x_i^2 x_j^2 - \sum_{\substack{i\neq j,k\\ k>j}} x_i^2 x_j x_k + 12x_1x_2x_3x_4\\ &= \sigma_1^2\sigma_2 - 4\sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_3 + 16\sigma_4\end{aligned}$$

und für den Nenner von (14) gilt:

$$\sigma_1^3 = \sum_{i=1}^{4} x_i^3 + 3\sum_{j\neq i} x_i^2 x_j + 6\sum_{k>j>i} x_i x_j x_k$$

$$-4\sigma_1\sigma_2 = -4\sum_{j\neq i} x_i^2 x_j - 12\sum_{k>j>i} x_i x_j x_k$$

$$8\sigma_3 = 8\sum_{k>j>i} x_i x_j x_k$$

Aufsummieren der obigen Gleichungen liefert:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{4} x_i^3 - \sum_{j\neq i} x_i^2 x_j + 2\sum_{k>j>i} x_i x_j x_k\\ &= \sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3\end{aligned}$$

Also erhalten wir für (14):

$$\begin{aligned}t_1 &= \frac{\sigma_1^2\sigma_2 - 4\sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_3 + 16\sigma_4}{\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3}\\ &= \frac{-4p^2 + 16r}{-8q}\\ &= \frac{p^2 - 4r}{2q}\end{aligned}$$

Ebenso berechnen wir den Zähler von (15):

$$\begin{aligned}
-4\sigma_2\sigma_3 &= -4\sum_{\substack{k\neq i,j\\ j>i}} x_i^2x_j^2x_k - 12\sum_{\substack{i\neq j,k,l\\ l>k>j}} x_i^2x_jx_kx_l\\
\sigma_1^2\sigma_3 &= \sum_{\substack{i\neq j,k\\ k>j}} x_i^3x_jx_k + 2\sum_{\substack{k\neq i,j\\ j>i}} x_i^2x_j^2x_k + 7\sum_{\substack{i\neq j,k,l\\ l>k>j}} x_i^2x_jx_kx_l\\
8\sigma_1\sigma_4 &= 8\sum_{\substack{i\neq j,k,l\\ l>k>j}} x_i^2x_jx_kx_l
\end{aligned}$$

Aufsummieren der obigen Gleichungen liefert:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{i\neq j,k\\ k>j}} x_i^3x_jx_k - 2\sum_{\substack{k\neq i,j\\ j>i}} x_i^2x_j^2x_k + 3\sum_{\substack{i\neq j,k,l\\ l>k>j}} x_i^2x_jx_kx_l\\
&= -4\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_3 + 8\sigma_1\sigma_4
\end{aligned}$$

und den Nenner von (15):

$$\begin{aligned}
\sigma_1^3 &= \sum_{i=1}^{4} x_i^3 + 3\sum_{j\neq i} x_i^2x_j + 6\sum_{k>j>i} x_ix_jx_k\\
-4\sigma_1\sigma_2 &= -4\sum_{j\neq i} x_i^2x_j - 12\sum_{k>j>i} x_ix_jx_k\\
8\sigma_3 &= 8\sum_{k>j>i} x_ix_jx_k
\end{aligned}$$

Aufsummieren der obigen Gleichungen liefert:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{4} x_i^3 - \sum_{j\neq i} x_i^2x_j + 2\sum_{k>j>i} x_ix_jx_k\\
&= \sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3
\end{aligned}$$

Also erhalten wir für (15):

$$\begin{aligned}
t_2 &= \frac{-4\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_3 + 8\sigma_1\sigma_4}{\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3}\\
&= \frac{4pq}{-8q}\\
&= -\frac{1}{2}p
\end{aligned}$$

Ebenso berechnen wir den Zähler von (16):

$$\sigma_3^2 = \sum_{k>j>i} x_i^2 x_j^2 x_k^2 + 2 \sum_{\substack{i,j\neq k,l\\ j>i,l>k}} x_i^2 x_j^2 x_k x_l$$

$$\sigma_1^2 \sigma_4 = \sum_{\substack{i\neq j,k,l\\ l>k>j}} x_i^3 x_j x_k x_l + 2 \sum_{\substack{i,j\neq k,l\\ j>i,l>k}} x_i^2 x_j^2 x_k x_l$$

$$-4\sigma_2\sigma_4 = -4 \sum_{\substack{i,j\neq k,l\\ j>i,l>k}} x_i^2 x_j^2 x_k x_l$$

Aufsummieren der obigen Gleichungen liefert:

$$\sum_{k>j>i} x_i^2 x_j^2 x_k^2 + \sum_{\substack{i\neq j,k,l\\ l>k>j}} x_i^3 x_j x_k x_l$$
$$= \sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_4 - 4\sigma_2\sigma_4$$

und der Nenner von (16):

$$\sigma_1^3 = \sum_{i=1}^{4} x_i^3 + 3 \sum_{j\neq i} x_i^2 x_j + 6 \sum_{k>j>i} x_i x_j x_k$$

$$-4\sigma_1\sigma_2 = -4 \sum_{j\neq i} x_i^2 x_j - 12 \sum_{k>j>i} x_i x_j x_k$$

$$8\sigma_3 = 8 \sum_{k>j>i} x_i x_j x_k$$

Aufsummieren der obigen Gleichungen liefert:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 - \sum_{j\neq i} x_i^2 x_j + 2 \sum_{k>j>i} x_i x_j x_k$$
$$= \sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3$$

Also erhalten wir für (16):

$$t_3 = \frac{\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_4 - 4\sigma_2\sigma_4}{\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3}$$
$$= \frac{q^2 - 4pr}{-8q}$$

Damit wird die Gleichung (13) zu:

$$\Theta^3 - \frac{p^2 - 4r}{2q}\Theta^2 - \frac{1}{2}p\Theta - \frac{4pr - q^2}{8q} = 0 \tag{17}$$

Analog zur Variante 1 können wir die Wurzeln Θ_1, Θ_2, Θ_3 dieser Gleichung (17) durch Radikale ausdrücken. Auch in diesem Fall können wir sehen, dass die explizite Bestimmung von D nicht notwendig ist, denn auch hier gilt, analog zur Variante 1:

$$K(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) = \Lambda_1$$

Wie in Variante 1 gilt: Der Körper Λ_2 wiederum entsteht aus Λ_1 durch Adjunktion einer Größe, die nicht alle vier Substitutionen von $\mathcal{K}_4$ sondern beispielsweiswe nur das Einselement und die Substitution $(12)(34)$ gestattet. Eine solche Größe ist $x_1 + x_2$. Wir haben:

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= \frac{x_1x_2 - x_3x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} \\
\Theta_2 &= \frac{x_1x_3 - x_2x_4}{x_1 - x_2 + x_3 - x_4} \\
\Theta_3 &= \frac{x_1x_4 - x_2x_3}{x_1 - x_2 - x_3 + x_4}
\end{aligned}$$

und es gilt:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0d$$

und mit Einsetzen von

$$x_1 = -(x_2 + x_3 + x_4)$$

erhalten wir für die Θ_i:

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= \frac{x_2^2 + x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4}{2(x_3 + x_4)} \\
&= \frac{(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)}{2(x_3 + x_4)} \\
\Theta_2 &= \frac{x_3^2 + x_3(x_2 + x_4) + x_2x_4}{2(x_2 + x_4)} \\
&= \frac{(x_2 + x_3)(x_3 + x_4)}{2(x_2 + x_4)} \\
\Theta_3 &= \frac{x_4^2 + x_4(x_2 + x_3) + x_2x_3}{2(x_2 + x_3)} \\
&= \frac{(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)}{2(x_2 + x_3)}
\end{aligned}$$

Wir setzen nun:

$$\begin{aligned}
y_2 &= x_3 + x_4 \\
y_3 &= x_2 + x_4 \\
y_4 &= x_2 + x_3
\end{aligned}$$

und erhalten so:

$$2\Theta_1 = \frac{y_4 y_3}{y_2}$$
$$2\Theta_2 = \frac{y_4 y_2}{y_3}$$
$$2\Theta_3 = \frac{y_3 y_2}{y_4}$$

Weiterhin gilt:

$$x_3 + x_4 = 2\sqrt{\Theta_2\Theta_3} = y_2$$
$$x_2 + x_4 = 2\sqrt{\Theta_1\Theta_3} = y_3$$
$$x_2 + x_3 = 2\sqrt{\Theta_1\Theta_2} = y_4$$

Diese 3 Irrationalitäten sind nicht unabhängig, sondern es gilt:

$$\frac{1}{8} y_2 y_3 y_4 = \Theta_1\Theta_2\Theta_3$$

Da $\mathcal{K}_4 \simeq \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$ die Ordnung 4 hat und eine Untergruppe der Ordnung 2 besitzt, brauchen wir genau zwei quadratische Irrationalitäten um von $\mathcal{K}_4$ zu $\mathcal{F}$ hinunter- oder von Λ zu Σ hinaufzusteigen. Tatsächlich lassen sich durch die 3 Größen y_i, die schon von zweien unter ihnen abhängen, die x_i rational bestimmen, denn es gilt:

$$2x_1 = -y_2 - y_3 - y_4$$
$$2x_2 = -y_2 + y_3 + y_4$$
$$2x_3 = y_2 - y_3 + y_4$$
$$2x_4 = y_2 + y_3 - y_4$$

Dies sind Auflösungsformeln der allgemeinen Gleichung 4. Grades. Aufgrund ihrer Herleitung gelten sie auch für jede spezielle Gleichung 4. Grades, für die gilt: $q \neq 0$, denn: die Nenner der Θ_i sind ungleich Null. Wenn nun die Nenner aufmultipliziert werden erhalten wir:

$$0 \neq (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) = -8q$$

somit muss auch gelten $q \neq 0$.

Für den Fall $q = 0$ lässt sich eine Gleichung 4. Grades einfach ohne die obigen Auflösungsformeln lösen:

Für $q = 0$ gilt:

$$x^4 + px^2 + qx + r = x^4 + px^2 + r = 0$$

und diese Gleichung kann man einfach lösen, indem man $x^2 = y$ setzt und die pq-Formel anwendet.

Literatur

[1] B. van der Waerden, *Algebra*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967, 5. Auflage
[2] K. Meyberg, *Algebra, Teil 2*, Carl Hanser Verlag, München/Wien, 1976, 1. Auflage

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, Anna Flötotto, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit ohne die Hilfe Anderer verfasst habe. Aßerdem habe ich keine Quellen verwendet, die nicht im Literaturverzeichnis angegeben sind.