# DER MULTIPLIKATIVE TRANSFER AUF DEM GROTHENDIECK-WITT-RING

DIPLOMARBEIT
VON
SIMON KRSNIK

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT BIELEFELD
NOVEMBER 2006

*Date*: 7. Dezember 2006.

Zusammenfassung. Ziel dieser Arbeit ist es, einen multiplikativen Transfer auf dem Grothendieck-Witt-Ring zu erklären. Dazu werde ich zunächst einen Norm-Funktor auf der Kategorie der freien Moduln über freien kommutativen Algebren definieren. Meinen Erkenntnissen liegen die unveröffentlichten Arbeiten [8], [9] und [10] zugrunde.

Inhaltsverzeichnis

## Einleitung

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit einem Thema, welches der Theorie der symmetrischen Bilinearformen (bzw. der quadratischen Formen) angehört. Sie ist aus den Arbeiten „Scratches on multiplicative transfer“ [8], „A Pfister form invariant for etale algebras“ [9] und „The multiplicative transfer for the Grothendieck-Witt ring“ [10] von Markus Rost entstanden, der sich bereits mit der Multiplikativität der Norm von Moduln und Bilinearformen beschäftigt hat. Der Text „A Pfister form invariant for etale algebras“ [9] wurde schon 2003 von Skip Garibaldi, Alexander Merkurjev und Jean-Pierre Serre in „Cohomological Invariants in Galois Cohomology“ [2, Remark 29.5] zitiert.

Ich werde mich ausschließlich mit symmetrischen Bilinearformen beschäftigen, aber wenn man an geeigneter Stelle 2 als invertierbar voraussetzt, bekommt man natürlich das gewünschte Resultat auch für quadratische Formen.

Die Isometrieklassen regulärer symmetrischer Bilinearformen über einem gegebenen Körper $K$ haben, vermöge der orthogonalen Summe und des Tensorprodukts bilinearer Abbildungen, die Struktur eines Semirings (siehe Abschnitt 5.3). Vervollständigt man diesen Semiring nach der Methode Grothendiecks zu einem Ring (siehe Unterabschnitt 1.1.2), so ist dieses Konstrukt als der Grothendieck-Witt-Ring für symmetrische Bilinearformen

$$GW(K)$$

bekannt. Ich werde den Grothendieck-Witt-Ring ausschließlich im Kontext regulärer symmetrischer Bilinearformen gebrauchen.

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist schließlich der Nachweis einer eindeutigen polynomialen Abbildung vom Grothendieck-Witt-Ring einer separablen Körpererweiterung $L$ in den Grothendieck-Witt-Ring des Grundkörpers $K$, die außerdem multiplikativ ist (siehe Satz 5.6.4).

$$\mathcal{N}_K^L \colon GW(L) \longrightarrow GW(K) \quad \text{vermöge } [\beta] \mapsto [\mathcal{N}(\beta)]$$

Eine Definition dieser Abbildung auf dem Witt-Ring bilinearer Abbildungen ist nicht möglich, denn wie man der Arbeit „Die multiplikative quadratische Norm für den Grothendieck-Witt-Ring“ von Tobias Wittkop entnehmen kann, ist die Norm einer hyperbolischen Form nicht hyperbolisch.

Um verstehen zu können, wie diese Abbildung auf Bilinearformen wirkt, werde ich mich zunächst mit dem Begriff der Norm eines Moduls auseinandersetzen.

Im Falle eines $L$-Vektorraumes $V$ über einer Galoiserweiterung $L|K$, ist dies einfach der $K$-Vektorraum

$$\mathcal{N}(V) = \left( \bigotimes_{g \in \mathrm{Gal}(L|K)} g \bullet V \right)^{\mathrm{Gal}(L|K)}$$

Diesen klassischen Ansatz findet man z.B. in dem Buch „Brauergruppen von Körpern“ [4] von Ina Kersten bei der Konstruktion eines Gruppen-Homomorphismusses von der Brauergruppe über $L$ in die Brauergruppe über $K$.

Ich werde mich der Norm eines Moduls etwas allgemeiner nähern und eine Definition benutzen, die man auch in den Texten [8] und [10] von Markus Rost finden kann. Dazu werde ich Moduln bzw. Algebren von symmetrischen Tensoren benötigen. Zu einer kommutativen $R$-Algebra $A$ ist das gerade die Unteralgebra

$$S_r A := (A^{\otimes r})^{\mathcal{S}_r} \subset A^{\otimes r}$$

der Invarianten unter der Operation der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_r$. Für den Fall, dass $A$ frei vom Rang $d$ ist, werde ich einen Ringhomomorphismus

$$\nu_R^A\colon S_dA \longrightarrow R \quad \text{mit } \nu_R^A(a\otimes\ldots\otimes a) = N(a)$$

definieren (siehe Satz 4.2.3), wobei $N$ die Algebren-Norm ($N\colon A \longrightarrow R$; $a \mapsto \det(\lambda_a)$) ist. Die Norm eines freien $A$-Moduls $V$ erhalte ich dann aus dem $S_dA$-Modul $S_dV = (V^{\otimes d})^{\mathcal{S}_d}$ durch einen Grundringwechsel nach $R$ via $\nu_R^A$:

$$\mathcal{N}(V) := S_dV \otimes_{S_dA} R$$

Abgesehen von den oben genannten Arbeiten von Markus Rost, findet man eine vergleichbare Konstruktion auch in dem Text „Un Foncteur Norme“ [1] von Daniel Ferrand.

Auf Grund der Funktorialität dieser Definition der Norm ist es möglich, nicht nur Normen von Moduln, sondern auch Normen von linearen oder gar von bilinearen Abbildungen zu betrachten. Zu einer $A$-bilinearen Abbildung

$$\beta\colon V\times W \longrightarrow M$$

erhält man eine eindeutige $R$-bilineare Abbildung

$$\mathcal{N}(\beta)\colon \mathcal{N}(V)\times\mathcal{N}(W) \longrightarrow \mathcal{N}(M)$$

so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{lccc} \beta\colon & V\times W & \longrightarrow & M \\ & \Big\downarrow{\scriptstyle \iota_V\times\iota_W} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \iota_M} \\ \mathcal{N}(\beta)\colon & \mathcal{N}(V)\times\mathcal{N}(W) & \longrightarrow & \mathcal{N}(M) \end{array}$$

wobei $\iota_V\colon V \longrightarrow \mathcal{N}(V)$ vermöge $v\mapsto v^{\otimes d}\otimes 1\in\mathcal{N}(V)$ (siehe Satz 4.5.2).

Ist $A$ eine separable Algebra und $M = A$, so ist $\mathcal{N}(M) = R$ und die Abbildung $\iota_M\colon M \longrightarrow \mathcal{N}(M)$ ist gerade die Algebren-Norm $N$. In diesem Fall ist es sogar möglich, eine schöne Formel für den Rang von $\mathcal{N}(V)$ anzugeben. Es gilt:

$$\mathrm{Rang}_R\big(\mathcal{N}(V)\big) = (\mathrm{Rang}_A V)^d$$

Ich werde diese Formel zunächst für Produktalgebren

$$A = R\times\cdots\times R$$

beweisen (siehe Satz 4.3.2). Später werde ich den separablen Fall auf den Fall einer Produktalgebra zurückführen (siehe Satz 4.4.2). Diese Vorgehensweise werde ich häufiger anwenden, wenn ich Aussagen über separable Algebren beweise. Sie ist darüber hinaus der Grund dafür, warum ich nicht speziell von separablen Körpererweiterungen, sondern allgemein von separablen Algebren spreche.

Es ist möglich, den Norm-Funktor auf den Grothendieck-Witt-Ring fortzusetzen. Dazu werde ich einen Fortsetzungssatz für polynomiale Abbildungen auf Halbgruppen (siehe 5.5.5) benutzen. Diesen Satz findet man in der Arbeit „The multiplicative transfer for the Grothendieck-Witt ring“ [10] von Markus Rost, aber auch in „K-Theory of the Weil Transfer Functor“ [3] von Seva Joukhovitski. Ansonsten jedoch scheint er nicht weit in der Literatur verbreitet zu sein.

Um zu zeigen, dass der Übergang von freien Moduln bzw. Bilinearformen zu ihrer Norm eine solche polynomiale Abbildung vom Grad $d$ ist, führe ich zu jeder Partition $\alpha_{(d,l)}$ von $d$ - einem $l$-Tupel $\alpha_{(d,l)} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_l)$ mit $\alpha_i > 0$ und $\alpha_1+\cdots+\alpha_l = d$ (siehe Unterabschnitt 1.2.1) - eine Verallgemeinerung dieses Norm-Begriffs ein.

Für freie $A$-Moduln $V_1, \dots, V_l$ bzw. $A$-Bilinearformen $\beta_1, \dots, \beta_l$ definiere ich

$$C_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}(V_1, \dots, V_l) := S_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}(V_1, \dots, V_l) \otimes_{S_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}A} \mathcal{C}_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}A$$

mit $\mathcal{C}_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}A := S_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}A \otimes_{S_dA} R$

$$\text{bzw.} \qquad C_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}(\beta_1, \dots, \beta_l) := \big(S_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}(\beta_1, \dots, \beta_l)\big)_{\mathcal{C}_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}A}$$

(Siehe dazu die Abschnitte 5.1 und 5.4, sowie Abschnitt 2.1 für die Definition von $S_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}A \supset S_dA$.).

Durch diese Konstruktion wird man im Falle einer separablen Körpererweiterung $L|K$ vom Grad $d$ sehen, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} & \Pi^l\overline{\mathrm{Bil}}(L) & \longrightarrow & GW(K) \\ \text{vermöge} & ([\beta_1], \dots, [\beta_l]) & \longmapsto & [C_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}(\beta_1, \dots, \beta_l)] \end{array}$$

(siehe Lemma 5.6.3) in den $\beta_i$ polynomial vom Grad $\alpha_i$ ist. Dieses Ergebnis liefert den Schlüssel zum Beweis der Hauptaussage dieser Arbeit.

An dieser Stelle möchte ich gerne Prof. Dr. Markus Rost, dem Betreuer meiner Diplomarbeit, für die Unterstützung bei der Erstellung meiner Arbeit und die nützlichen Tipps im Umgang mit LaTeX meinen besonderen Dank aussprechen.

Darüber hinaus gilt mein Dank Julia Arnold, Markus Severitt, Gunnar Sjuts, Tobias Wittkop und Claudia Wolf, die mir sehr dabei geholfen haben, diese Arbeit von Fehlern und Unschönheiten zu befreien.

## 1. Grundlegendes

Die folgenden Ergebnisse lassen sich aus [12] und [13] ableiten.

### 1.1. **Universelle Konstruktionen auf Gruppen und Ringen.**

Wenn wir in diesem Kapitel von Ringen sprechen, meinen wir kommutative Ringe mit Einselement. Entsprechendes gilt für Algebren.

1.1.1. *Gruppenkomplettierung.* Unter einer *Halbgruppe* verstehen wir eine Menge $B$ zusammen mit einer kommutativen und assoziativen Verknüpfung

$$B \times B \longrightarrow B \quad \text{vermöge } a, b \mapsto a + b$$

Wir gehen weiter davon aus, dass $B$ ein neutrales Element $0 \in B$ enthält. Ist $B'$ eine weitere Halbgruppe, dann nennen wir eine Abbildung

$$f \colon B \longrightarrow B' \quad \text{mit } f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ und } f(0) = 0$$

einen *Halbgruppen-Homomorphismus.*

Als nächstes werden wir $B$ zu einer abelschen Gruppe machen. Dazu werden wir folgende Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Halbgruppe $B \times B$ (mit komponentenweiser Addition) betrachten. Zwei Elemente $(a, x), (b, y) \in B \times B$ heißen äquivalent (wir schreiben $(a, x) \sim (b, y)$), wenn es ein $c \in B$ gibt, so dass

$$c + a + y = c + b + x \in B$$

Wir setzen $\overline{B} := B \times B/\sim$ und nennen $\overline{B}$ die *Gruppenkomplettierung* von $B$. Die Äquivalenzklasse von $(a, x) \in B \times B$ werden wir mit $[a, x]$ bezeichnen. Offensichtlich ist

$$[a, x] - [b, y] = [a, x] + [y, b]$$

Damit ist $\overline{B}$ wirklich eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $[0, 0]$ und wir haben einen Halbgruppen-Homomorphismus

$$\iota_{\overline{B}} \colon B \longrightarrow \overline{B} \quad \text{vermöge } a \mapsto [a, 0]$$

Wir werden auch manchmal $a - x$ anstatt $[a, x]$ schreiben.

Hat die Halbgruppe folgende Eigenschaft

$$c + a = c + b \Longrightarrow a = b \quad \text{für } a, b, c \in B$$

die wir auch *Kürzungseigenschaft* nennen möchten, dann ist die Abbildung $\iota_{\overline{B}}$ injektiv.

Die Gruppenkomplettierung hat folgende universelle Eigenschaft:

**Bemerkung 1.1.1.** Sei $A$ eine abelsche Gruppe. Zu jedem Halbgruppen-Homomorphismus $f \colon B \longrightarrow A$ gibt es genau einen Gruppen-Homomorphismus $\overline{f} \colon \overline{B} \longrightarrow A$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\overline{B} \arrow[r, "\overline{f}"] & A \\
B \arrow[u, "\iota_{\overline{B}}"] \arrow[r, "f"] & A \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

1.1.2. *Grothendieck-Ringe.* Eine Menge $S$ mit zwei kommutativen und assoziativen Verknüpfungen '+' und '$\cdot$', die dem Distributivgesetz genügen und je ein neutrales Element 0 bzw. 1 haben, werden wir als *Semiring* bezeichnen. Ist $S'$ ein weiterer Semiring und $f \colon S \to S'$ eine Abbildung mit

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(a + b) = f(a) + f(b) \text{ und } f(ab) = f(a)f(b) \quad \text{für } a, b \in S$$

so werden wir diese Abbildung einen *Semiring-Homomorphismus* nennen.

Wir können $S$ zu einem Ring komplettieren. Dazu werden wir mit Hilfe der Verknüpfung '$\cdot$' auf $S$ ein Produkt auf $\overline{(S,+)}$ definieren. Wir sagen

$$[a,x]\cdot[b,y] := [ab+xy, ay+bx]$$

Diesen Ring werden wir mit $G(S)$ bezeichnen und nennen ihn den *Grothendieck-Ring* von $S$. Natürlich haben wir auch hier einen kanonischen Semiring-Homomorphismus

$$\iota_{G(S)}\colon S \longrightarrow G(S) \quad \text{vermöge } a \mapsto [a,0] \text{ für } a \in S$$

Der Grothendieck-Ring von $S$ hat folgende universelle Eigenschaft:

**Bemerkung 1.1.2.** Sei $f\colon S \longrightarrow R$ ein Semiring-Homomorphismus in einen Ring $R$. Dann gibt es genau einen Ring-Homomorphismus $f_{(S)}\colon G(S) \longrightarrow R$, so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} G(S) \arrow[r, "f_{(S)}"] & R \arrow[d, equal] \\ S \arrow[u, "\iota_{G(S)}"] \arrow[r, "f"] & R \end{tikzcd}$$

1.1.3. *Halbgruppenringe.* Sei $r > 0$ und $M$ eine Menge. Mit

$$\Pi^r M := \underbrace{M \times \cdots \times M}_{r\text{-mal}}$$

bezeichnen wir das $r$-fache direkte Produkt von $M$.

Sei $R$ ein Ring. Mit $R[M]$ (oder $R^{(M)}$) bezeichnen wir den freien $R$-Modul mit Basis $M$ und mit $e_m \in R[M]$ den zu $m \in M$ gehörigen Basisvektor. Die Elemente in $R^{(M)}$ sind endliche Summen der Form

$$\sum_{x\in M} a_x e_x \quad \text{wobei } a_x \in R$$

Sei $S$ eine Halbgruppe. Wir werden nun eine Ringstruktur auf $R^{(S)}$ definieren. Eine Verknüpfung ist schon durch die $R$-Modulstruktur auf $R^{(S)}$ gegeben, die andere erhalten wir, indem wir die folgende Abbildung distributiv fortsetzen

$$R^{(S)} \times R^{(S)} \longrightarrow R^{(S)} \qquad \text{vermöge } ae_x \cdot be_y \mapsto abe_{x+y}$$

Den Ring $(R^{(S)},+,\cdot)$ werden wir mit $R[S]$ bezeichnen, wir nennen ihn *Halbgruppenring* von $R$ und $S$. Die Notation ist an dieser Stelle nicht ganz eindeutig, es lässt sich jedoch immer eindeutig aus dem Kontext erschließen, ob wir über den Modul oder den Halbgruppenring sprechen. Wir haben offensichtlich einen Halbgruppen-Homomorphismus

$$\iota_{[S]}\colon S \longrightarrow R[S] \quad \text{vermöge } x \mapsto 1_R e_x$$

und einen Ring-Homomorphismus

$$\iota_{R[S]}\colon R \longrightarrow R[S] \quad \text{vermöge } a \mapsto ae_0 = a1_{R[S]}$$

**Bemerkung 1.1.3.**

(1) $e_0 \in R[S]$ ist das Einselement des Rings $R[S]$.
(2) Wir identifizieren $S$ mit seinem Bild unter dem Homomorphismus $\iota_{[S]}$ und schreiben
$$S \subset R[S]$$
(3) Es gilt sogar $S \subset \big(R[S],\cdot\big)$

Der Homomorphismus

$$\epsilon_S\colon \mathbb{Z}[S] \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad \text{vermöge } e_x \mapsto 1 \quad \text{für } x \in S$$

wird auch *Augmentation* genannt. Wir werden Kern $\epsilon_S$ mit $I_S$ bezeichnen. Offensichtlich ist $I_S$ das von den Elementen $e_x - 1 \in \mathbb{Z}$ erzeugte Ideal.

Auch diese Konstruktion hat eine universelle Eigenschaft:

**Bemerkung 1.1.4.** Ist $f\colon R \longrightarrow A$ ein Ring-Homomorphismus und $\varphi\colon S \longrightarrow (A,\cdot)$ ein Halbgruppen-Homomorphismus. Dann gibt es genau einen Ring-Homomorphismus

$$\Phi\colon R[S] \longrightarrow A \quad \text{mit } \Phi(ae_x) = f(a)\cdot\varphi(x)$$

Im Fall $S = \Pi^m\mathbb{N}$ ist der Halbgruppenring

$$R[\Pi^m\mathbb{N}] =: R[t_1,\dots,t_m]$$

der Polynomring in den $m$ Variablen $t_1,\dots,t_m$.

**Bemerkung 1.1.5.** Ist $f\colon S \longrightarrow (A,\cdot)$ eine beliebige Abbildung in eine abelsche Gruppe $A$, dann gibt es einen eindeutigen Gruppen-Homomorphismus $\widehat{f}\colon \mathbb{Z}[S] \longrightarrow A$, so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[S] \arrow[r, "\widehat{f}"] & A \\ S \arrow[u, "\iota_{[S]}"] \arrow[r, "f"] & A \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

Dieser Gruppen-Homomorphismus $\widehat{f}$ ist gegeben durch

$$\sum_{x\in S} n_x e_x \longmapsto \prod_{x\in S} \big(f(x)\big)^{n_x}$$

1.1.4. *Quotientenringe.* Ist $R$ ein Ring und $S \subseteq (R,\cdot)$ eine Halbgruppe, so nennen wir $S$ eine *multiplikative Teilmenge* von $R$.

Seien $s,t \in S$ und $a,b \in R$. Wir werden uns nun mit folgenden Äquivalenzklassen auf $S \times R$ beschäftigen:

$$(s,a) \sim (t,b) \quad :\Longleftrightarrow: \quad \text{Es existiert ein } v \in S, \text{ so dass } vat = vbs$$

Die Äquivalenzklasse von $(s,a)$ werden wir mit $a/s$ bezeichnen. Wir setzen

$$S^{-1}R := S \times R/\sim$$

und werden $S^{-1}R$ den *Quotientenring* von $R$ und $S$ nennen. Offensichtlich haben wir einen Ring-Homomorphismus

$$\iota_{S^{-1}}\colon R \longrightarrow S^{-1}R \quad \text{vermöge } a \mapsto a/1$$

Die wichtigste Eigenschaft von $S^{-1}R$ ist, dass wir für $s,r \in S$ das Inverse von $t/s \in S^{-1}R$ bilden können. Dies ist

$$(t/s)^{-1} = s/t$$

Der Quotientenring hat folgende universelle Eigenschaft:

**Bemerkung 1.1.6.** Sei $A$ ein Ring und $\varphi\colon R \to A$ ein Ring-Homomorphismus mit $\varphi(S) \subseteq A^\times$. Dann gibt es genau einen Ring-Homomorphismus

$$\varphi_{S^{-1}}\colon S^{-1}R \longrightarrow A$$

so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}R & \xrightarrow{\varphi_{S^{-1}}} & A \\ {\scriptstyle \iota_{S^{-1}}}\uparrow & & \| \\ R & \xrightarrow{\varphi} & A \end{array}$$

Insbesondere ist $\varphi_{S^{-1}}(a/s) := \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$ (vgl. Unterabschnitt 1.1.1).

**Bemerkung 1.1.7.** Sei $I$ ein Ideal in $R$, dann gibt es folgende kanonische Isomorphie:

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}(R/I) & \longrightarrow & S^{-1}R/S^{-1}I \\ (a+I)/b & \longmapsto & (a/b)+S^{-1}I \end{array}$$

1.1.5. *Zusammenhang.* Wir werden nun die Konzepte aus den Unterabschnitten 1.1.3 und 1.1.4 miteinander verknüpfen. Sei $S$ eine Halbgruppe. $\mathbb{Z}[\overline{S}]$ ist die $\mathbb{Z}$-Algebra, die von den Elementen $e_{[a,x]}$ mit $[a,x] \in \overline{S}$ erzeugt wird.

**Bemerkung 1.1.8.**

(1) $S \subset \mathbb{Z}[S]$ ist eine multiplikative Teilmenge.
(2) Es ist
$$S \subset \left(\mathbb{Z}[\overline{S}]\right)^{\times}$$
(3) Wir haben folgende kanonische Isomorphie
$$\mathbb{Z}[\overline{S}] \simeq S^{-1}\mathbb{Z}[S] \quad \text{vermöge } e_{[a,x]} \mapsto e_a/e_x \quad \text{für } [a,x] \in \overline{S}$$

*Beweis.* (1) Nach Bemerkung 1.1.3(3) ist $S \subset (\mathbb{Z}[S], \cdot)$. Damit ist $S$ schon per Definition eine multiplikative Teilmenge von $\mathbb{Z}[S]$.

(2) Wir betrachten die Komposition:

$$S \xrightarrow{\iota_{\overline{S}}} \overline{S} \xrightarrow{\iota_{[\overline{S}]}} \mathbb{Z}[\overline{S}] \qquad \text{mit } x \longmapsto [x,0] \longmapsto e_{[x,0]}$$

Das Bild von $S$ unter der kanonischen Abbildung $\iota_{\overline{S}}$ ist invertierbar in $\overline{S}$ und das Bild von $\overline{S}$ unter der kanonischen Abbildung $\iota_{[\overline{S}]}$ ist invertierbar in $\mathbb{Z}[\overline{S}]$. Damit ist auch $S$ in $\mathbb{Z}[\overline{S}]$ invertierbar und $e_{[x,0]}^{-1} = e_{[0,x]}$.

(3) Der Homomorphismus

$$\overline{S} \longrightarrow S^{-1}\mathbb{Z}[S] \quad \text{vermöge } [a,x] \mapsto e_a/e_x$$

setzt sich nach Unterabschnitt 1.1.3 eindeutig fort zu einem Homomorphismus

$$\mathbb{Z}[\overline{S}] \longrightarrow S^{-1}\mathbb{Z}[S] \quad \text{vermöge } \sum_{i=1}^{n} m_i e_{[a_i,x_i]} \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} m_i e_{a_i} \prod_{i\neq j} e_{x_j}\right) \Big/ \left(\prod_{i=1}^{n} e_{x_i}\right)$$

Der Homomorphismus

$$\mathbb{Z}[S] \longrightarrow \mathbb{Z}[\overline{S}] \quad \text{vermöge } e_a \mapsto e_{[a,0]} \quad \text{für } a \in S$$

setzt sich nach Unterabschnitt 1.1.4 eindeutig fort zu dem Homomorphismus

$$S^{-1}\mathbb{Z}[S] \longrightarrow \mathbb{Z}[\overline{S}] \quad \text{vermöge } e_a/e_x \mapsto e_{[a,x]} \quad \text{für } a,x \in S$$

Diese beiden Homomorphismen sind offensichtlich invers. $\square$

**Korollar 1.1.9.** *Seien $I_S \subset \mathbb{Z}[S]$ und $I_{\overline{S}} \subset \mathbb{Z}[\overline{S}]$ die Kerne der jeweiligen Augmentation, dann ist für $k \geq 0$*

$$S^{-1}I_S^k \simeq I_{\overline{S}}^k$$

*Beweis.* Die Kerne werden als Ideal von den Elementen $1 - e_x$ mit $x \in S$ über dem jeweiligen Ring erzeugt. Nach Bemerkung 1.1.8(3) überführt Quotientenbildung nach $S$ die Ringe ineinander. Die Behauptung folgt letztendlich durch Induktion nach $k$. □

Nun einige Rechenregeln und Abkürzungen für Elemente aus $\mathbb{Z}\lceil S \rceil$:

**Bemerkung 1.1.10.** Seien $a, b, x, y \in S$ und $k \geq 0$.

(1) $e_{[a,x]} = e_a / e_x$
(2) $e_{[a,0]} = e_a$
(3) $e_{[a,x]} = (e_{[x,a]})^{-1}$
(4) $e_{[a,x]} e_{[b,y]} = e_{[a+b,x+y]}$
(5) $e^k_{[a,x]} = e_{[ka,kx]}$

1.2. **Partitionen und symmetrische Gruppe.** Sei in diesem Abschnitt $r > 0$.

1.2.1. *Partitionen.* Sei $V$ ein $R$-Modul und $\alpha_1, \ldots, \alpha_l > 0$ mit $\alpha_1 + \cdots + \alpha_l = r$, so heißt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \Pi^l \mathbb{N}$ eine *Partition* von $r$ der Länge $l$. Weiter bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_{(r,l)}$ die Menge aller Partitionen von $r$ der Länge $l$ und nennen $\mathcal{P}_r = \bigcup_{1 \leq l}^{r} \mathcal{P}_{(r,l)}$ die Menge aller Partitionen von $r$. Wir werden auch $\alpha_{(r)}$ (bzw. $\alpha_{(r,l)}$) für eine Partition $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ (der Länge $l$) schreiben.

Wir betrachten $(v_1, \ldots, v_r) \in \Pi^r V$. Dann gibt es paarweise verschiedene Vektoren $w_1, \ldots, w_l \in V$, so dass

$$(v_1, \ldots, v_r) = (w_{i_1}, \ldots, w_{i_r}) \quad \text{mit } i_i, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, l\}$$

Dabei kommt der Vektor $w_j$ genau $\alpha_j$-mal in $(v_1, \ldots, v_r)$ vor. Dann ist $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ eine Partition von $r$.

Die Abbildung

$$\mu_r \colon V \longrightarrow \Pi^r V \quad \text{vermöge } v \longmapsto (v, \ldots, v)$$

liefert uns zu jedem $\alpha_{(r,l)} \in \mathcal{P}_{(r,l)}$ eine Abbildung

$$\mu_{\alpha_{(r,l)}} \colon \Pi^l V \longrightarrow \Pi^r V \quad \text{vermöge } (v_1, \ldots, v_l) \longmapsto (\mu_{\alpha_1}(v_1), \ldots, \mu_{\alpha_l}(v_l))$$

(Diese Abbildung ist ein Gruppen-Homomorphismus von $(\Pi^l V, +)$ nach $(\Pi^r V, +)$.)

Wir werden zum Abschluss dieses Unterabschnittes den Begriff der Partition noch etwas erweitern. Wir werden

$$\gamma \in \mathbb{N}^l \quad \text{mit } \gamma_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, l \text{ und } \sum_{i=1}^{l} \gamma_i = r$$

eine *erweiterte Partition von $r$ (der Länge $l$)* nennen und schreiben $\gamma \in \mathcal{P}'_{(r,l)}$.

1.2.2. *Die symmetrische Gruppe.* Sei $\mathcal{S}_r$ die symmetrische Gruppe auf $r$ Elementen. Mit $\tau_{ij} \in \mathcal{S}_r$ werden wir die Transposition bezeichnen, die das $i$-te mit dem $j$-ten Element vertauscht. Wir werden mit

$$\text{sign} \colon \mathcal{S}_r \longrightarrow \{\pm 1\}$$

den Gruppen-Homomorphismus bezeichnen, der jeder Permutation ihr Signum zuordnet.

Zu einer Partition $\alpha_{(r,l)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathcal{P}_{(r,l)}$ definieren wir wie folgt eine Untergruppe $\mathcal{S}_{\alpha_{(r,l)}} \subset \mathcal{S}_r$

$$\mathcal{S}_{\alpha_{(r,l)}} := \mathcal{S}_{\alpha_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\alpha_l} \subset \mathcal{S}_r$$

Natürlich ist $\mathcal{S}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l} \simeq \mathcal{S}_{\alpha_{\sigma 1}, \ldots, \alpha_{\sigma l}}$ für $\sigma \in \mathcal{S}_l$. Der Index von $\mathcal{S}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}$ in $\mathcal{S}_r$ ist:

$$((\alpha_1, \ldots, \alpha_l)) := \frac{r!}{\alpha_1! \cdots \alpha_l!}$$

Wir setzen $k_0 = 0$ und $k_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_i$ für $1 \leq i \leq l$ und definieren $K_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l} \subset \mathcal{S}_r$ als die Teilmenge, die die folgenden Permutationen enthält

$$K_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l} = \{\sigma \in \mathcal{S}_r \mid \sigma(k_{i-1}+1) < \sigma(k_{i-1}+2) < \cdots < \sigma(k_i) \text{ für } 1 \leq i \leq l\}$$

Diese Menge $K_{r_1,\ldots,r_l}$ enthält $((\alpha_1,\ldots,\alpha_l))$ Elemente und ist ein Repräsentantensystem für die Linksnebenklassen von $\mathcal{S}_r/\mathcal{S}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l}$. D.h. jedes $\sigma \in \mathcal{S}_r$ lässt sich eindeutig darstellen durch

$$\sigma = \kappa \circ \tau \quad \text{mit } \tau \in \mathcal{S}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l} \text{ und } \kappa \in K_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l}$$

(Vgl. auch [6, S. 251-254].)

**Beispiel 1.2.1.** Wir betrachten

$$\mathcal{S}_{r-1} \times \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_{r-1,1} \subset \mathcal{S}_r$$

Dann ist

$$K_{r-1,1} = \{\tau_{i,r} \in \mathcal{S}_r \mid i = 1,\ldots,r-1\}$$

## 1.3. **Das Tensorprodukt.**

1.3.1. *Tensorprodukte.* Seien $V_1,\ldots,V_r$ und $W$ $R$-Moduln. Die $R$-multilinearen Abbildungen von $V_1 \times \cdots \times V_r$ nach $W$ werden wir mit $\mathrm{Mult}_R(V_1,\ldots,V_r;W)$ bezeichnen. Für $r = 2$ schreiben wir $\mathrm{Bil}_R(V_1,V_2;W)$ anstatt $\mathrm{Mult}_R(V_1,V_2;W)$.

Wir betrachten den $R$-Modul $R[V_1 \times \cdots \times V_r]$. Seien $v_i, v_i' \in V_i$ für $j = 1,\ldots,r$ und $\lambda \in R$. Wir betrachten den Untermodul $I_{V_1 \cdots V_r}$, der von folgenden Vektoren erzeugt wird

$$e_{(v_1,\ldots,\lambda v_i,\ldots,v_r)} - \lambda e_{(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_r)} \quad \text{und} \tag{1}$$

$$e_{(v_1,\ldots,v_i+v_i',\ldots,v_r)} - \left(e_{(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_r)} + e_{(v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_r)}\right) \tag{2}$$

Der Faktormodul

$$R[V_1 \times \cdots \times V_r]/I_{V_1 \cdots V_r} = V_1 \otimes_R \ldots \otimes_R V_r = V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$$

ist das *Tensorprodukt* von $V_1,\ldots,V_r$ über $R$. Die Elemente in $V_1 \otimes_R \ldots \otimes_R V_r$ werden wir mit $v_1 \otimes \ldots \otimes v_r$ bezeichnen. Es existiert folgende kanonische $R$-multilineare Abbildung:

$$\begin{array}{rccl} \pi_{V_1 \cdots V_r}\colon & V_1 \times \cdots \times V_r & \longrightarrow & V_1 \otimes_R \ldots \otimes_R V_r \\ & (v_1,\ldots,v_r) & \mapsto & v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \end{array}$$

Die Bildelemente unter $\pi_{V_1 \cdots V_r}$ werden wir *zerlegbare Tensoren* nennen. Jedes Element $v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$ lässt sich als Linearkombination von zerlegbaren Tensoren schreiben; die zerlegbaren Tensoren sind also Erzeuger von $V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$. Ist $V_i$ für $i = 1,\ldots,r$ frei vom Rang $n_i$ über $R$, so ist $V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$ frei vom Rang $\prod_{i=1}^r n_i$ über $R$.

Das Tensorprodukt hat folgende universelle Eigenschaft: Sei $W$ ein weiterer $R$-Modul und $\Psi\colon V_1 \times \cdots \times V_r \longrightarrow W$ $R$-multilinear, so existiert genau eine $R$-lineare Abbildung $\Psi'\colon V_1 \otimes \ldots \otimes V_r \longrightarrow W$ mit $\Psi = \Psi' \circ \pi_{V_1 \cdots V_r}$. Insbesondere ist

$$\mathrm{Mult}_R(V_1,\ldots,V_r;W) \simeq \mathrm{Hom}_R(V_1 \otimes \ldots \otimes V_r, W)$$

Die universelle Eigenschaft erlaubt es, für lineare Abbildungen

$$\psi_k\colon V_k \longrightarrow W_k$$

zwischen den $R$-Moduln $V_k, W_k$ mit $(k = 1,\ldots,r)$ die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_r\colon V_1 \otimes \ldots \otimes V_r & \longrightarrow & W_1 \otimes \ldots \otimes W_r \\ v_1 \otimes \ldots \otimes v_r & \mapsto & \psi_1(v_1) \otimes \ldots \otimes \psi_r(v_r) \end{array}$$

zu definieren.

Sind $A_1, \ldots, A_r$ $R$-Algebren, so ist $A_1 \otimes_R \ldots \otimes_R A_r$ durch komponentenweise Multiplikation eine $R$-Algebra. $A_1 \otimes A_2$ ist das Koprodukt der beiden $R$-Algebren $A_1$ und $A_2$ in der Kategorie der (kommutativen) Algebren über $R$.

Für $V_1 = \cdots = V_r = V$ schreiben wir

$$I_r \text{ anstatt } I_{V\cdots V} \quad \text{und} \quad \pi_r \text{ anstatt } \pi_{V\cdots V}.$$

Den Faktormodul

$$T^r_R V = T^r V = V^{\otimes r} = \underbrace{V \otimes_R \ldots \otimes_R V}_{r\text{-mal}} = R[\Pi^r V]/I_r$$

nennen wir die *$r$-te Tensorpotenz* von $V$. Damit ist $T^1 V = V$.

Ist $V$ frei vom Rang $n$ über $R$ und eine $b_1, \ldots, b_n$ Basis, so ist $T^r V$ frei und

$$b_{i_1} \otimes \ldots \otimes b_{i_r} \quad \text{mit } i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\}$$

eine Basis. Insbesondere ist $T^r V$ dann vom Rang $n^r$ über $R$. Wir setzen $T^0 V = R$.

In $T^r_R V$ haben wir folgende Rechenregel:

**Bemerkung 1.3.1.** Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $M := \mathrm{Abb}(\{1, \ldots, r\}, \{1, \ldots, n\})$, dann ist

$$(v_1 + \cdots + v_n)^{\otimes r} = \sum_{f \in M} v_{f(1)} \otimes \ldots \otimes v_{f(r)}$$

Wir definieren uns folgende Abbildung:

$$\gamma_r := \pi_r \circ \mu_r \quad \text{vermöge } v \longmapsto v^{\otimes r} \quad \text{für } r \geq 0$$

wobei $\gamma_0(v) = 1_R$ für $v \in V$. (Diese Abbildung ist im Allgemeinen kein Homomorphismus! Vgl. die letzte Bemerkung 1.3.1.)

1.3.2. *Grundringwechsel.* Sei $V$ ein $R$-Modul und $\psi\colon R \longrightarrow S$ ein Ring-Homomorphismus in einen weiteren Ring $S$. Dann ist

$$V \otimes_R S \quad \text{vermöge} \quad a\,(v \otimes b) \mapsto v \otimes a\,b \quad \text{für } v \in V \text{ und } a, b \in S$$

ein $S$-Modul. Offensichtlich ist $R \otimes_R S \simeq S$. Wir haben eine kanonische $R$-lineare Abbildung

$$\iota_V\colon V \longrightarrow V \otimes_R S \quad \text{vermöge } v \mapsto v \otimes 1,$$

die ein $R$-Erzeugendensystem $b_1, \ldots, b_r$ von $V$ auf ein $S$-Erzeugendensystem $b_1 \otimes 1, \ldots, b_r \otimes 1$ von $V \otimes_R S$ abbildet. Ist $V$ frei vom Rang $n$ über $R$, so ist insbesondere $V \otimes_R S$ frei vom Rang $n$ über $S$.

**Bemerkung 1.3.2.** (Die universelle Eigenschaft von $V \otimes_R S$.) Sei $V$ ein $R$-Modul und $X$ ein $S$-Modul. Dann kann man $X$ via $\psi$ auch als $R$-Modul ansehen, und es existiert zu jeder $R$-linearen Abbildung $f\colon V \longrightarrow X$ genau eine $S$-lineare Abbildung

$$f_{(S)}\colon V \otimes_R S \longrightarrow X \quad \text{mit } f = f_{(S)} \circ \iota_V.$$

*Beweis.* Wir setzen $f_{(S)}(v \otimes a) = af(v)$. Diese Abbildung ist offensichtlich $S$-linear und erfüllt $f = f_{(S)} \circ \iota_V$. Sie ist eindeutig bestimmt, denn $\iota_V$ bildet ein $R$-Erzeugendensystem von $V$ auf ein $S$-Erzeugendensystem von $V \otimes S$ ab. □

**Bemerkung 1.3.3.** Seien $V$ und $W$ $R$-Moduln und $X$ ein $S$-Modul.

(1) Durch die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_S(V \otimes_R S, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(V, X) \quad \text{mit } g \mapsto g \circ \iota_V$$

ist sowohl eine $R$-Isomorphie als auch eine $S$-Isomorphie gegeben.

(2) Ist $g\colon V \to W$ eine $R$-lineare Abbildung, dann gibt es genau eine $S$-lineare Abbildung

$$g_S\colon V \otimes S \to W \otimes S \text{ mit } g_S(v \otimes 1) = g(v) \otimes 1.$$

Dabei gilt: $\quad g_S = g \otimes id_S$.

(3) Sind $V$ und $W$ frei von endlichem Rang, dann sind folgende $S$-Moduln isomorph

$$\mathrm{Hom}_R(V, W) \otimes_R S \simeq \mathrm{Hom}_S(V \otimes_R S, W \otimes_R S)$$

*Beweis.* (1) folgt aus Bemerkung 1.3.2.

(2) Man erhält $g_S$ durch die Anwendung von Bemerkung 1.3.2 auf $\iota_W \circ g$:

$$g_S = (\iota_W \circ g)_{(S)}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit in Bemerkung 1.3.2 ist $g_S = g \otimes id_S$.

(3) Wir wenden Bemerkung 1.3.2 auf die $R$-lineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_R(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(V \otimes S, W \otimes S) \quad \text{vermöge } f \mapsto f^{(S)}$$

an. Die Bijektivität folgt dann aus Ranggründen. □

**Bemerkung 1.3.4.** Die Abbildung $- \otimes_R S$ ist ein kovarianter Funktor von der Kategorie der $R$-Moduln (bzw. $R$-Algebren) in die Kategorie der $S$-Moduln (bzw. $S$-Algebren).

**Satz 1.3.5.** *Sei $R$ ein Ring, $A$ eine $R$-Algebra und seien $V_1, \ldots, V_r$ $R$-Moduln. Dann gibt es folgende kanonische $A$-Isomorphie*

$$\begin{array}{lccc} & (V_1 \otimes_R A) \otimes_A \ldots \otimes_A (V_r \otimes_R A) & \simeq & (V_1 \otimes_R \ldots \otimes_R V_r) \otimes_R A \\ \textit{vermöge} & (v_1 \otimes a_1) \otimes \ldots \otimes (v_r \otimes a_r) & \longleftrightarrow & (v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) \otimes \prod_{i=1}^{r} a_i \end{array}$$

*für $v_i \in V_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ und $a_1, \ldots, a_r \in A$.*

*Insbesondere haben wir für $V = V_1 = \cdots = V_r$ eine $A$-Isomorphie:*

$$T_A^r(V \otimes_R A) \simeq T_R^r(V) \otimes_R A$$

*Beweis.* Die Abbildungsvorschrift beschreibt offensichtlich eine Bijektion zwischen den zerlegbaren Tensoren beider $A$-Moduln. Wie man leicht sieht, entsteht auf diese Weise eine $A$-lineare Abbildung. □

1.3.3. *Dualität und Tensorprodukte.* Sei $V$ ein $R$-Modul. Wir werden mit $V^*$ den Dualraum $\mathrm{Hom}_R(V, R)$ von $V$ bezeichnen. Ist $V$ frei vom Rang $n$ über $R$, so ist auch $V^*$ frei vom Rang $n$ über $R$.

**Bemerkung 1.3.6.** Seien $V_1, \ldots, V_l$ freie $R$-Moduln von endlichem Rang, dann ist folgende Abbildung ein Isomorphismus:

$$\begin{array}{ccc} V_1^* \otimes \ldots \otimes V_l^* & \xrightarrow{\simeq} & (V_1 \otimes \ldots \otimes V_l)^* \\ \vartheta_1 \otimes \ldots \otimes \vartheta_l & \mapsto & \big(v_1 \otimes \ldots \otimes v_l \mapsto \vartheta_1(v_1) \cdots \vartheta_l(v_l)\big) \end{array}$$

1.4. **Spezielle Tensorpotenzen.** Sei auch in diesem Abschnitt $r \geq 0$.

1.4.1. *Die symmetrische Tensorpotenz.* Sei $I_S$ der Untermodul von $T^rV$, der von allen Tensoren der Form

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r - v_{\sigma 1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma r} \quad \text{mit } \sigma \in \mathcal{S}_r$$

erzeugt wird, so gelangen wir durch die Projektion $\pi_S \colon T^{\otimes r} \to T^rV/I_S$ an die *$r$-te symmetrische Tensorpotenz* von $V$ über $R$.

$$S^r_R V = S^r V := T^r V/I_S$$

Mit $v_1 \vee \cdots \vee v_n$ werden wir die Restklasse von $v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \in V^{\otimes r}$ in $S^rV$ bezeichnen. Die Bilder zerlegbarer Tensoren werden wir auch hier *zerlegbare Tensoren* nennen. Ist $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ eine Partition von $r$ und $v_1, \ldots, v_l \in V$, so schreiben wir auch

$$v_1^{\alpha_1} \vee \cdots \vee v_l^{\alpha_l} \quad \text{anstatt} \quad v_1 \vee \cdots \vee v_1 \vee v_2 \vee \cdots \vee v_l \vee \cdots \vee v_l$$

Es ist $S^0V \simeq R$ und $S^1V \simeq V$. Ist $V$ frei vom Rang $n$ und $b_1, \ldots, b_n$ eine $R$-Basis von $V$, dann ist die Menge

$$\{b_{i_1}^{\alpha_1} \vee \cdots \vee b_{i_l}^{\alpha_l} | (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathcal{P}_{(r,l)} \text{ und } 1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n\}$$

eine $R$-Basis von $V$. Insbesondere ist $S^rV$ vom Rang $\binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n-1}{n-1}$ über $R$. Wir setzen $\pi_{S^r} = \pi_S \circ \pi_r$.

Die symmetrische Tensorpotenz hat folgende universelle Eigenschaft: Sei $W$ ein weiterer $R$-Modul und $\Psi_S \colon \Pi^r V \longrightarrow W$ eine $R$-multilineare Abbildung mit $\Psi_S(v_1, \ldots, v_r) = \Psi_S(v_{\sigma 1}, \ldots, v_{\sigma r})$ für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$, dann existiert genau eine $R$-lineare Abbildung

$$\Psi'_S \colon S^rV \longrightarrow W \quad \text{mit } \Psi_S = \pi_{S^r} \circ \Psi'_S.$$

Aufgrund dieser Eigenschaft gibt es zu jeder linearen Abbildung $\psi \colon V \longrightarrow W$ genau eine lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} S^r_R(\psi)\colon & S^rV & \longrightarrow & S^rW \\ & v_1 \vee \cdots \vee v_r & \mapsto & \psi(v_1) \vee \cdots \vee \psi(v_r) \end{array}$$

1.4.2. *Die äußere Tensorpotenz.* Sei $I_\Lambda$ der Untermodul von $T^r_RV$, der von allen Tensoren der Form

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \quad \text{mit } v_i = v_j \text{ für ein Paar } (i,j) \text{ mit } i \neq j$$

erzeugt wird, so kommen wir durch $\pi_\Lambda \colon T^{\otimes r} \to T^rV/I_\Lambda$ an die *$r$-te äußere Tensorpotenz* von $V$ über $R$.

$$\Lambda^r_R V = \Lambda^r V := T^rV/I_\Lambda$$

Die Restklassen von $v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \in V^{\otimes r}$ werden wir als $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \in \Lambda^r V$ schreiben. Auch hier nennen wir die Bilder zerlegbarer Tensoren ebenfalls *zerlegbare Tensoren* und es ist $\Lambda^0 V \simeq R$ und $\Lambda^1 V \simeq V$. Ist $V$ frei vom Rang $n$ und $b_1, \ldots, b_n$ eine $R$-Basis von $V$, so ist die Menge

$$\{b_{k_1} \wedge \cdots \wedge b_{k_r} \mid 1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n\}$$

eine Basis von $\Lambda^r_R V$. Insbesondere ist $\Lambda^r V$ frei vom Rang $\binom{n}{r}$ über $R$. Wir setzen $\pi_{\Lambda^r} = \pi_\Lambda \circ \pi_r$.

Die äußere Tensorpotenz hat folgende universelle Eigenschaft: Sei $W$ ein weiterer $R$-Modul und $\Psi_\Lambda \colon \Pi^r V \longrightarrow W$ eine $R$-multilineare Abbildung mit $\Psi_\Lambda(v_1, \ldots, v_r) = 0$ falls $v_i = v_j$ für ein Paar $(i,j)$ mit $i \neq j$, dann existiert genau eine $R$-lineare Abbildung

$$\Psi'_\Lambda \colon \Lambda^r V \to W \quad \text{mit } \Psi_\Lambda = \pi_{\Lambda^r} \circ \Psi'_\Lambda.$$

Aufgrund dieser Eigenschaft gibt es zu jeder linearen Abbildung $\psi\colon V \longrightarrow W$ genau eine lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Lambda^r(\psi)\colon & \Lambda^r V & \longrightarrow & \Lambda^r W \\ & v_1 \wedge \cdots \wedge v_r & \mapsto & \psi(v_1) \wedge \cdots \wedge \psi(v_r) \end{array}$$

## 1.5. **Spezielle Algebren und Endomorphismen.**

1.5.1. *Die Algebra* $\Pi^d R$. In diesem Unterabschnitt werden wir uns eingehender mit der Produktalgebra $A := \Pi^d R$ $(d \geq 1)$ beschäftigen. Von besonderem Interesse sind für uns die Elemente

$$e_i := (0, \ldots, 0, 1_R, 0, \ldots, 0) \in \Pi^d R$$

bei denen an der $i$-ten Stellen das Einselement aus $R$ steht und alle anderen Einträge 0 sind. Sie bilden eine Basis von $\Pi^d R$ über $R$ und sind sowohl idempotent als auch paarweise orthogonal. Jedes dieser Idempotente erzeugt ein Ideal in $\Pi^d R$ und man sieht

$$e_i A = e_i \Pi^d R = e_i R \quad \text{für } i = 1, \ldots, d$$

Das Einselement in $\Pi^d R$ erfüllt folgende Identität

$$1_A = \sum_{i=1}^{d} e_i$$

Damit haben wir für $A$ folgendes Ergebnis

$$A = 1_A \cdot A = \left(\sum_{i=1}^{d} e_i\right) A = \bigoplus_{i=1}^{d} e_i R$$

Sei $V$ ein freier $A$-Modul mit Basis $b_1, \ldots, b_n$, dann ist $V$ auch ein freier $R$-Modul mit Basis

$$e_i b_j \quad \text{mit } 1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq n$$

Sei $1 \leq i \leq d$, dann ist $e_i V$ ein $R$-Modul und die Vektoren $e_i b_j$ mit $1 \leq j \leq n$ bilden eine $R$-Basis von $e_i V$ und es ist

$$e_i V \simeq_R V \otimes_A e_i A \simeq_R V \otimes_R e_i R$$

**Bemerkung 1.5.1.** Sei $1 \leq i \leq d$ und $W$ ein weiterer $A$-Modul, dann ist folgende Abbildung ein $R$-Isomorphismus.

$$\begin{array}{rcll} e_i(V \otimes_A W) & \longrightarrow & e_i V \otimes_R e_i W & \\ e_i(v \otimes w) & \mapsto & e_i v \otimes e_i w & \quad \text{für } v \in V,\ w \in W \end{array}$$

1.5.2. *Die Tensoralgebra* $T_R^r\big(\Pi^d R\big)$. Sei $r \geq 1$. Generell ist die Tensoralgebra $T_R^r A$ eine Algebra mit Einselement

$$1_{A^{\otimes r}} = 1_A \otimes \ldots \otimes 1_A$$

Sei nun $A = \Pi^d R$ und $e_1, \ldots, e_d$ die orthogonalen Idempotente, die wir im letzten Unterabschnitt kennen gelernt haben.

**Bemerkung 1.5.2.** Seien $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_r \in \{1, \ldots, d\}$ und $I = (i_1, \ldots, i_r)$, $J = (j_1, \ldots, j_r)$. Dann gilt

$$(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}) \cdot (e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_r}) = \begin{cases} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_r} & \text{falls } I = J \\ 0 & \text{falls } I \neq J \end{cases}$$

Wir haben also in dieser $R$-Algebra vom Rang $d^r$ genau $d^r$ orthogonale Idempotente. Sie sind von der Form

$$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \quad \text{mit } 1 \leq i_1 \ldots i_r \leq d$$

und erzeugen ebenfalls Ideale in $T_R^r V$ vom Rang 1 über $R$, denn wir haben nach Bemerkung 1.3.1 auch hier eine Zerlegung der Eins

$$1_{T_R^r \Pi^d R} = \sum_{1 \leq i_1 \ldots i_r \leq d} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r}$$

Damit ist

$$T_R^r\big(\Pi^d R\big) = \bigoplus_{1 \leq i_1 \ldots i_r \leq d} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} R$$

und wir sehen anhand der letzten Bemerkung

$$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \cdot T_R^r\big(\Pi^d R\big) = e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} R$$

1.5.3. *Separable Algebren.* Wir werden diesen Unterabschnitt dazu nutzen, die Definition einer *separablen Algebra* einzuführen. Wir werden eine Körpererweiterung $L|K$ *separabel* nennen, wenn jedes Element aus $L$ ein über $K$ separables Minimalpolynom hat. Ein Polynom über $K$ nennen wir *separabel*, wenn es über dem algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von $K$ nur einfache Nullstellen hat.

Wir werden eine endlichdimensionale $K$-Algebra *separabel* nennen, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

**Satz 1.5.3.** *Sei $A$ eine $K$-Algebra mit $\dim_K A = n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *Es gibt separable Körpererweiterungen $L_1, \ldots, L_r$ von $K$, so dass*

$$A \simeq L_1 \times \cdots \times L_r \quad \textit{und} \quad \sum_{i=1}^{r} [L_i : K] = n$$

(2) *Sei $\overline{K}$ der algebraische Abschluss von $K$, dann ist*

$$A \otimes_K \overline{K} \simeq \Pi^n \overline{K}$$

*als $\overline{K}$-Algebren.*

(3) *Es existiert eine Körpererweiterung $Z|K$, so dass*

$$A \otimes_K Z \simeq \Pi^n Z$$

*als $Z$-Algebren.*

Eine solche Erweiterung $Z|K$ aus Satz 1.5.3(4) werden wir einen *Zerfällungskörper* der separablen $K$-Algebra $A$ nennen.

Sei $L|K$ eine separable Körpererweiterung vom Grad $n$ und $F$ ein minimaler Zerfällungskörper von $L$, dann wissen wir aus der Galois-Theorie, dass $F|K$ galoisch ist und

$$L \otimes_K F \simeq \Pi^n F$$

Dieses Ergebnis werden wir für separable Algebren umformulieren:

**Bemerkung 1.5.4.** Es existiert eine Galoiserweiterung $F|K$ mit $F \supset L_i \supset K$ (für $1 \leq i \leq r$), so dass

$$A \otimes_K F \simeq \Pi^n F$$

als $F$-Algebren.

Sei $\mathcal{G}$ die Galoisgruppe von $F|K$. Den kanonischen Isomorphismus

$$T_F^r(V \otimes_K F) \longrightarrow T_K^r V \otimes_K F$$

werden wir in diesem Unterabschnitt mit $\psi$ bezeichnen.

**Lemma 1.5.5.** *$\psi$ respektiert die Operation der Galoisgruppe von $F|K$.*

*Beweis.* Sei $g \in \mathcal{G}$, seien $v_1, \dots, v_d \in V$ und $a_1, \dots, a_d \in F$. Wir sehen, dass

$$\begin{aligned}
\psi \circ g\big((v_1 \otimes a_1) \otimes \ldots \otimes (v_d \otimes a_d)\big) &= \psi\big(v_1 \otimes g(a_1) \otimes \ldots \otimes v_d \otimes g(a_d)\big) \\
&= (v_1 \otimes \ldots \otimes v_d) \otimes \prod_{i=1}^{d} g(a_i) \\
&= (v_1 \otimes \ldots \otimes v_d) \otimes g\left(\prod_{i=1}^{d} a_i\right) \\
&= g\left((v_1 \otimes \ldots \otimes v_d) \otimes \prod_{i=1}^{d} a_i\right) \\
&= g \circ \psi\big((v_1 \otimes a_1) \otimes \ldots \otimes (v_d \otimes a_d)\big)
\end{aligned}$$

Also respektiert der Isomorphismus $\psi$ die Operation der Galoisgruppe. □

1.5.4. *Einige Algebren-Endomorphismen.* Sei

$$\lambda_x \colon A \longrightarrow A \quad \text{vermöge } a \mapsto xa$$

die Linksmultiplikation mit $x \in A$.

**Bemerkung 1.5.6.** Sei $V$ ein freier $R$-Modul vom Rang $n$, dann ist $\Lambda_R^n V$ frei vom Rang 1 über $R$. Insbesondere haben wir einen Isomorphismus $\Lambda_R^n V \simeq R$.

*Beweis.* Sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von $V$ und $v_1, \dots, v_n \in V$ mit $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} b_j$ für $i = 1, \dots, n$. Die lineare Abbildung

$$\Lambda_R^n V \longrightarrow R \quad \text{vermöge } v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \mapsto \det(a_{ji})$$

ist aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus. □

**Bemerkung 1.5.7.** Sei $A$ eine $R$-Algebra, dann haben wir folgenden injektiven Algebra-Homomorphismus

$$\lambda_\bullet \colon A \longrightarrow \mathrm{End}_R(A) \quad \text{vermöge } x \mapsto \lambda_x$$

(bzw. einen Isomorphismus wenn $A = R$).

*Beweis.* Seien $x, y \in A$. Wegen $\lambda_{xy} = \lambda_x \circ \lambda_y$ und $\lambda_{x+y} = \lambda_x + \lambda_y$ ist die Abbildung ein Homomorphismus. Die Injektivität folgt dann aus

$$\lambda_y(1) = y \neq x = \lambda_x(1) \quad \text{für } y \neq x$$

Die Surjektivität im Fall $A = R$ ist klar. □

Insbesondere gibt es zu jedem freien $R$-Modul $V$ vom Rang $n$ einen $R$-Algebren-Isomorphismus

$$\delta \colon \mathrm{End}_R(\Lambda^n V) \xrightarrow[\text{Bem.1.5.6}]{\simeq} \mathrm{End}_R(R) \xrightarrow[\text{Bem.1.5.7}]{\simeq} R$$

## 2. Symmetrische Tensoren

Wenn wir in diesem Kapitel von Ringen sprechen, dann meinen wir kommutative Ringe mit Eins. Dementsprechend verstehen wir unter einer Algebra eine kommutative Algebra mit Eins. Wenn wir über andere Ringe oder Algebren reden, werden wir es vorher ankündigen.

2.1. **Symmetrische Tensoren.** Sei $V$ ein $R$-Modul. Wir werden in diesem Unterabschnitt nur Tensorprodukte über $R$ betrachten. Eine Untergruppe $U \subseteq \mathcal{S}_r$ operiert wie folgt auf $T^rV$:

Sei $v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \in T^rV$ ein zerlegbarer Tensor und $\sigma \in U$.

$$\begin{array}{ccc} U \times T^rV & \longrightarrow & T^rV \\ \big(\sigma, (v_1 \otimes \ldots \otimes v_r)\big) & \mapsto & \sigma \bullet (v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) := (v_{\sigma^{-1}1} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}r}) \end{array}$$

Diese Operation induziert eine Operation auf $\Lambda^rV$, denn ist $(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) \in V^{\otimes r}$ ein Erzeuger von $I_\Lambda$ mit $v_i = v_j$ für ein Paar $(i,j)$ mit $i \neq j$, dann ist auch $v_{\sigma^{-1}i} = v_{\sigma^{-1}j}$ (für $\sigma \in \mathcal{S}_r$) und damit

$$\sigma \bullet (v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) \equiv 0 \mod I_\Lambda \quad \text{genau dann, wenn} \quad (v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) \equiv 0 \mod I_\Lambda$$

Auf $S^rV$ hingegen wird diese Operation trivial.

Die Invarianten unter dieser Operation werden wir mit $(T^rV)^U$ bezeichnen, sie bilden einen Untermodul von $T^rV$. Für $U \subseteq \mathcal{S}_r$ definieren wir

$$\gamma_r \colon V \longrightarrow (T^rV)^U \quad \text{vermöge } v \mapsto v^{\otimes r}$$

Ist $U' \subseteq U$ eine Untergruppe von $U$, dann ist

$$(T^rV)^U \subseteq (T^rV)^{U'}$$

ein Untermodul. Wir schreiben kürzer $S_rV := (T^rV)^{\mathcal{S}_r}$. Möchten wir kenntlich machen, über welchem Ring tensoriert wurde, so schreiben wir auch

$$S_r(V|R) := (T^r_RV)^{\mathcal{S}_r} = \{x \in T^r_RV \mid \sigma \bullet x = x \text{ für alle } \sigma \in \mathcal{S}_r\}$$

Es ist $S_0V = R$ und $S_1V = V$. Ein Element $x \in S_rV$ werden wir *symmetrischen Tensor* nennen.

**Bemerkung 2.1.1.** Seien $U_1 \subset \mathcal{S}_k$ und $U_2 \subset \mathcal{S}_{r-k}$, dann gilt

$$(T^rV)^{U_1 \times U_2} = (T^kV)^{U_1} \otimes (T^{r-k}V)^{U_2} \quad \text{für } 0 \leq k \leq r$$

Sei $\alpha_{(r,l)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathcal{P}_{(r,l)}$ eine Partition, dann definieren wir einen Modul

$$S_{\alpha_{(r,l)}}V := S_{\alpha_1}V \otimes \ldots \otimes S_{\alpha_l}V = (T^rV)^{\mathcal{S}_{\alpha_{(r,l)}}}$$

und eine Abbildung

$$\gamma_{\alpha_{(r,l)}} \colon \Pi^lV \longrightarrow S_{\alpha_{(r,l)}}V \quad \text{vermöge } (v_1, \ldots, v_l) \mapsto v_1^{\otimes \alpha_1} \otimes \ldots \otimes v_l^{\otimes \alpha_l}$$

**Beispiel 2.1.2.** Für $k, l \geq 0$ ist

$$S_kV \otimes S_lV = (T^{k+l}V)^{\mathcal{S}_{(k,l)}} \supseteq S_{k+l}V$$

Dadurch folgt insbesondere:

$$S_kV \otimes V^{\otimes l} \supseteq S_{k+l}V$$

Sind $k, l \neq 0$, dann ist für $V \neq \{0\}$ offensichtlich

$$S_kV \otimes S_lV \supsetneq S_{k+l}V$$

Wir können die soeben beschriebene Konstruktion wie folgt verallgemeinern. Seien $V_1, \ldots, V_l$ weitere $R$-Moduln, dann definieren wir für beliebige $k_1, \ldots, k_l \geq 0$

$$S_{(k_1,\ldots,k_l)}(V_1, \ldots, V_l) := S_{k_1} V_1 \otimes \ldots \otimes S_{k_l} V_l$$

Sei $\alpha_{(r,l)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ eine Partition, und seien $w_1, \ldots, w_l \in V$. Wir erinnern uns an $K_{\alpha_{(r,l)}} = K_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l}$ aus Kapitel 1.2 und betrachten die Abbildung $\gamma_{\alpha_{(r,l)}}$. Für $w_1 \in W_1, \ldots, w_l \in W_l$ definieren wir

$$w_1 \cdots w_l^{[\alpha_{(r,l)}]} := \sum_{\kappa \in K_{\alpha_{(r,l)}}} \kappa \bullet \gamma_{\alpha_{(r,l)}}(w_1, \ldots, w_l) = \sum_{\kappa \in K_{\alpha_{(r,l)}}} \kappa \bullet (w_1^{\otimes \alpha_1} \otimes \ldots \otimes w_l^{\alpha_l})$$

Seien $v, w \in V$ und $r \geq 0$, dann ist in dieser Schreibweise

$$\begin{aligned} v^{[r]} &= v^{\otimes r} \\ vw^{[1,1]} &= v \otimes w + w \otimes v \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.1.3.** Ist $K'$ ein weiteres Repräsentantensystem von $\mathcal{S}_r/\mathcal{S}_{\alpha_{(r,l)}}$, dann ist

$$w_1 \cdots w_l^{[\alpha_{(r,l)}]} = \sum_{\kappa \in K'} \kappa \bullet \gamma_{\alpha_{(r,l)}}(w_1, \ldots, w_l)$$

*Beweis.* Sei $\sigma \in \mathcal{S}_r$, dann ist

$$\sigma \bullet \gamma_{\alpha_{(r,l)}}(w_1, \ldots, w_l) = \tau \bullet \gamma_{\alpha_{(r,l)}}(w_1, \ldots, w_l) \qquad \text{für alle } \tau \in \sigma\mathcal{S}_{\alpha_{(r,l)}}$$ □

Wir haben zwei Spezialfälle gesehen, in denen $w_1 \cdots w_l^{[\alpha_{(r,l)}]}$ ein symmetrischer Tensor war. Mit Hilfe der letzten Bemerkung sieht man schnell, dass $w_1 \cdots w_l^{[\alpha_{(r,l)}]}$ auch im Allgemeinen symmetrisch ist.

**Lemma 2.1.4.** $w_1 \cdots w_l^{[\alpha_{(r,l)}]} \in S_{\alpha_{(r,l)}} V$ *ist ein symmetrischer Tensor.*

*Beweis.* Sei $\sigma \in \mathcal{S}_r$. Dann ist

$$\sigma K_{\alpha_{(r,l)}} := \{\sigma \circ \kappa \mid \kappa \in K_{\alpha(r,l)}\}$$

ein anderes Repräsentantensystem für $\mathcal{S}_r/\mathcal{S}_{\alpha_{(r,l)}}$. Jetzt sieht man schnell, dass

$$\begin{aligned} \sigma \bullet w_1 \cdots w_l^{[\alpha_{(r,l)}]} &= \sum_{\kappa \in K_{\alpha_{(r,l)}}} (\sigma \circ \kappa) \bullet \gamma_{\alpha_{(r,l)}}(w_1, \ldots, w_l) \\ &= \sum_{\kappa' \in \sigma K_{\alpha_{(r,l)}}} \kappa' \bullet \gamma_{\alpha_{(r,l)}}(w_1, \ldots, w_l) \\ &= \sum_{\kappa \in K_{\alpha_{(r,l)}}} \kappa \bullet \gamma_{\alpha_{(r,l)}}(w_1, \ldots, w_l) \qquad = w_1 \cdots w_l^{[\alpha_{(r,l)}]} \end{aligned}$$

□

Diese Definition der $w_1 \cdots w_l^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_l)} \in S_r V$ lässt sich problemlos auch auf erweiterte Partitionen mit $\alpha_i \geq 0$ ausweiten. Wenn wir es nicht ausdrücklich sagen, werden wir diese Schreibweise nur für normale Partitionen verwenden und $\alpha_i > 0$ voraussetzen.

Manchmal wird es sinnvoll sein, den elementarsymmetrischen Tensor aus $S_r V$ zu betrachten, der von dem zerlegbaren Tensor $v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \in V^{\otimes r}$ erzeugt wird. Wie wir wissen, gibt es ein $l$-Tupel $(w_1, \ldots, w_l) \in \Pi^l V$ mit paarweise verschiedenen Vektoren $w_1, \ldots, w_l \in V$ und eine, durch die Reihenfolge der $w_i$ eindeutig bestimmte, Partition $\alpha_{(r,l)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathcal{P}_{(r,l)}$, so dass

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_r = \kappa \bullet \gamma_{\alpha_{(r,l)}}(w_1, \ldots, w_l) \quad \text{für ein } \kappa \in \mathcal{S}_r$$

Da $\gamma_{\alpha_{(r,l)}}(w_1,\ldots,w_l) \in S_{\alpha_{(r,l)}}V$ ist, und da $K_{\alpha_{(r,l)}}$ ein Repräsentantensystem von $\mathcal{S}_r/\mathcal{S}_{\alpha_{(r)}}$ ist, können wir sogar $\kappa \in K_{\alpha_{(r,l)}}$ annehmen. Das Element $\kappa \in K_{\alpha_{(r,l)}}$ ist durch die Reihenfolge der $w_i$ eindeutig bestimmt, es gilt jedoch

$$w_1 \cdots w_l^{[\alpha_{(r,l)}]} = w_{\sigma 1} \cdots w_{\sigma l}^{[\alpha_{\sigma 1},\ldots,\alpha_{\sigma l}]} \quad \text{für } \sigma \in \mathcal{S}_l$$

Also macht es Sinn

$$\mathbb{E}_{(v_1,\ldots,v_r)} := w_1 \cdots w_l^{[\alpha_{(r,l)}]}$$

als den von $v_1 \otimes \ldots \otimes v_r$ erzeugten elementarsymmetrischen Tensor zu bezeichnen. Wir haben beispielsweise

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(v,\ldots,v)} &= v^{[r]} && \text{für } v \in V \\ \mathbb{E}_{(v_1,\ldots,v_r)} &= v_1 \ldots v_r^{[1,\ldots,1]} && \text{für paarweise verschiedene } v_1,\ldots,v_r \in V \end{aligned}$$

2.2. **Ein Erzeugendensystem für symmetrische Tensoren.** Sei nun $V$ ein $R$-Modul mit Basis $b_1,\ldots,b_n$.

**Lemma 2.2.1.** *Die Tensoren*

$$\mathbb{E}_{(b_{j_1},\ldots,b_{j_r})} \qquad 1 \leq j_1,\ldots,j_r \leq n$$

*sind ein Erzeugendensystem für $S_rV$. Oder anders formuliert: Die Tensoren*

$$b_{i_1} \cdots b_{i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]} \quad \textit{mit } \alpha_{(r,l)} \in \mathcal{P}_{(r)} \textit{ und } 1 \leq l \leq r$$

*sind ein Erzeugendensystem von $S_rV$.*

*(Man kann natürlich annehmen, dass $1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n$.)*

*Beweis.* Wir überlegen uns zunächst die $R$-Modulstruktur von $V^{\otimes r}$ und erkennen

$$V^{\otimes r} = \bigoplus_{1\leq i_1,\ldots,i_r\leq n} (b_{i_1} \otimes \ldots \otimes b_{i_r})R$$

Folglich können wir jeden symmetrischen Tensor $x \in S_rV \subset V^{\otimes r}$ darstellen durch eine Linearkombination

$$x = \sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in H} a_{(i_1,\ldots,i_r)}\, b_{i_1} \otimes \ldots \otimes b_{i_r}$$

mit $a_{(i_1,\ldots,i_r)} \in R\backslash\{0\}$ und einer endlichen Menge

$$H \subset \{(i_1,\ldots,i_r) \mid 1 \leq i_1,\ldots,i_r \leq n\}$$

Da $x$ symmetrisch ist und die $b_{i_1}\otimes\ldots\otimes b_{i_r}$ linear unabhängig sind, gilt offensichtlich

$$(\sigma^{-1}i_1,\ldots,\sigma^{-1}i_r) \in H \quad \text{für } \sigma \in \mathcal{S}_r \text{ und } (i_1,\ldots,i_r) \in H$$

Folglich ist

$$x - a_{(i_1,\ldots,i_r)}\, \mathbb{E}_{(b_{i_1},\ldots,b_{i_r})}$$

ein symmetrischer Tensor mit weniger Summanden als $x$, und die Behauptung folgt induktiv. □

Eine Basis von $S_rV$ anzugeben, ist also selbst in diesem einfachen Fall etwas schwieriger. Sei

$$B_{(n,l)} = \{(i_1,\ldots,i_l) \in \mathbb{N}^l \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n\}$$

die Menge der aufsteigenden $l$-elementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$, dann sind die

$$b_{i_1} \ldots b_{i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]} \qquad \text{mit } \big((i_1,\ldots,i_l),\alpha_{(r,l)}\big) \in \bigcup_{l=1}^{n} \big(B_{(n,l)} \times \mathcal{P}_{(r,l)}\big)$$

wie in Lemma 2.2.1 ein Erzeugendensystem. Wir schreiben $I_l$ für $(i_1,\dots,i_l) \in B_{(n,l)}$. Sei nun

$$\big(I_l,\alpha_{(r,l)}\big) \in \bigcup_{l=1}^{n} \big(B_{(n,l)} \times \mathcal{P}_{(r,l)}\big) =: \mathcal{B}_{r,n}$$

Je zwei Elemente dieser Menge sind verschieden, und jeder Basisvektor von $V^{\otimes r}$ kommt in genau einer Summe genau einmal vor. Deshalb ist

$$S_rV = \bigoplus_{(I_l;\alpha_{(r,l)})\in\mathcal{B}_{r,n}} b_{i_1}\dots b_{i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]}\ R$$

Insbesondere kann man durch $\mathcal{B}_{r,n}$ eine $R$-Basis für $S_rV$ angeben.

Wenn wir erweiterte Partitionen zulassen, verändert sich die Formel wie folgt:

$$S_rV = \bigoplus_{\alpha_{(r,n)}\in\mathcal{P}'_{r,n}} b_1\dots b_n^{[\alpha_{(r,n)}]}\ R$$

In manchen Fällen sind Erzeuger weitaus einfacher anzugeben. Wir sind speziell an dem Fall interessiert, in dem $S_rV$ von den Tensoren $\gamma_r(v) = v^{\otimes r} \in V^{\otimes r}$ erzeugt wird.

**Bemerkung 2.2.2.** $S_2V$ wird von Tensoren der Form $v^{\otimes 2} = v\otimes v$ $(v \in V)$ erzeugt.

*Beweis.* Seien $v, w \in V$.

$$(v\otimes w) + (w\otimes v) = (v + w \otimes v + w) - (v\otimes v) - (w\otimes w)$$

□

**Bemerkung 2.2.3.** Ist $K$ ein unendlicher Körper und $V$ ein $K$-Vektorraum, dann wird $S_rV$ von den Vektoren $v^{\otimes r}$ $(v \in V)$ erzeugt.

*Beweis.* Der Beweis zu dieser Bemerkung ist keineswegs offensichtlich, deshalb gehen wir in dieser Arbeit nicht näher auf ihn ein. □

2.3. **Grundringwechsel von symmetrischen Tensoren.** Wir werden uns in diesem Abschnitt eine für den weiteren Verlauf sehr wichtige Aussage erarbeiten.

Seien $V$ ein $R$-Modul und $A$ eine $R$-Algebra. Mit den symmetrischen Tensoren in $T_A^r(V\otimes_R A)$ sind wir nach Korollar 1.3.5 in folgender Situation:

$$\begin{array}{ccc} T_A^r(V\otimes_R A) & \xrightarrow{\simeq} & T_R^r(V)\otimes_R A \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_r(V\otimes_R A|A) & & S_r(V|R)\otimes_R A \end{array}$$

**Satz 2.3.1.** *Sei $U \subseteq \mathcal{S}_r$ eine Untergruppe. Dann haben wir eine $A$-Isomorphie*

$$\big(T_A^r(V\otimes_R A)\big)^U \simeq (T_R^rV)^U \otimes_R A$$

*Beweis.* Seien $v_1,\dots,v_r \in V$, $a_1,\dots,a_r \in A$ und $\sigma \in \mathcal{S}_r$. Wie man sieht, gilt unter der kanonischen Isomorphie aus Satz 1.3.5

$$\sigma \bullet \big((v_1\otimes a_1)\otimes\dots\otimes(v_r\otimes a_r)\big) \longleftrightarrow \prod_{i=1}^{r} a_i \cdot \big(\sigma\bullet(v_1\otimes\dots\otimes v_r)\otimes 1\big)$$

Damit ist ein beliebiger Tensor aus $T_A^r(V\otimes_R A)$ genau dann invariant unter der Operation von $U \subseteq \mathcal{S}_r$, wenn sein Bild in $T_R^r(V)\otimes_R A$ invariant ist. □

**Korollar 2.3.2.** *Damit haben wir eine kanonische $A$-Isomorphie*

$$\begin{array}{ccc} S_r(V\otimes_R A|A) & \simeq & S_r(V|R)\otimes A \\ (v_1\otimes a_1)\cdots(v_l\otimes a_l)^{[\alpha_1,\dots,\alpha_l]} & \longleftrightarrow & v_1\cdots v_l^{[\alpha_1,\dots,\alpha_l]}\otimes a_1^{\alpha_1}\cdots a_l^{\alpha_l} \end{array}$$

*Beweis.* Für $U = \mathcal{S}_r$ ist dies genau die in Satz 2.3.1 angegebene Isomorphie. □

**Korollar 2.3.3.** *Seien $V_1, \ldots, V_l$ $R$-Moduln, $k_1, \ldots, k_l \geq 0$ und $A$ eine $R$-Algebra. Dann haben wir folgende $A$-Isomorphie:*

$$S_{(k_1,\ldots,k_l)}(V_1 \otimes_R A, \ldots, V_l \otimes_R A|A) \simeq \big(S_{(k_1,\ldots,k_l)}(V_1, \ldots, V_l|R)\big) \otimes_R A$$

**Bemerkung 2.3.4.** Ist $A$ eine separable $K$-Algebra und $F|K$ die Galoiserweiterung die wir in Unterabschnitt 1.5.3 eingeführt haben. Dann respektiert diese Isomorphie die Operation der Galoisgruppe von $F|K$.

In Zukunft wird folgende Situation noch von besonderem Interesse für uns sein. Sei $R[t_1, \ldots, t_m]$ der Polynomring in $m$ Unbestimmten über $R$, dann definieren wir

$$V[t_1, \ldots, t_m] := V \otimes_R R[t_1, \ldots, t_m]$$

**Bemerkung 2.3.5.**

$$T^r_{R[t_1,\ldots,t_m]}(V[t_1, \ldots, t_m]) \simeq T^r_R(V) \otimes_R R[t_1, \ldots, t_m]$$

Insbesondere haben wir nach Korollar 2.3.2 eine $R[t_1, \ldots, t_m]$-Isomorphie

$$S_r(V[t_1, \ldots, t_m]|R[t_1, \ldots, t_m]) \simeq S_r(V|R) \otimes R[t_1, \ldots, t_m]$$

2.4. **Algebren auf Tensorpotenzen.** Sei $V$ nun wieder ein Modul über dem Ring $R$. Wir definieren

$$T^\bullet_R V := \bigoplus_{r\geq 0} T^r_R V$$

Dieser $R$-Modul hat durch die folgende bilineare Abbildung die Struktur einer graduierten $R$-Algebra.

Seien $(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) \in V^{\otimes k}$ und $(w_1 \otimes \ldots \otimes w_l) \in V^{\otimes l}$ zerlegbare Tensoren.

$$\begin{array}{ccc} T^\bullet V \times T^\bullet V & \longrightarrow & T^\bullet V \\ (v_1 \otimes \ldots \otimes v_k), (w_1 \otimes \ldots \otimes w_l) & \mapsto & (v_1 \otimes \ldots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_l) \end{array}$$

Durch $\pi_S$ (bzw. $\pi_\Lambda$) wird auch $S^r V$ (bzw. $\Lambda^r V$) zu einer graduierten $R$-Algebra $S^\bullet V$ (bzw. $\Lambda^\bullet V$). Die Multiplikation sieht hier wie folgt aus:

$$(v_1 \vee \cdots \vee v_k), (w_1 \vee \cdots \vee w_l) \longmapsto (v_1 \vee \cdots \vee v_k \vee w_1 \vee \cdots \vee w_l)$$

bzw.

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k), (w_1 \wedge \cdots \wedge w_l) \longmapsto (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_l)$$

Diese Struktur vererbt sich, wie wir bereits in Beispiel 2.1.2 gesehen haben, in der Form leider nicht auf $S_r V$, aber wenn $V$ frei von endlichem Rang ist, können wir auf ähnliche Weise ein Produkt definieren. Sei

$$S_\bullet V := \bigoplus_{r\geq 0} S_r V$$

**Lemma 2.4.1.** *Seien $x \in S_l V$ und $y \in S_k V$, dann ist*

$$\sum_{\tau \in K_{l,k}} \tau \bullet (x \otimes y) \quad \in S_{l+k} V$$

*Beweis.* Der Beweis hierzu ist eine leichte Abwandlung des Beweises von Lemma 2.1.4. Wir rechnen diese Behauptung auf elementarsymmetrischen Tensoren nach, indem wir $\mathbb{E}_{v_1,\ldots,v_l} \in S_l V$ und $\mathbb{E}_{w_1,\ldots,w_k} \in S_k V$ betrachten. Der Tensor

$$\mathbb{E}_{v_1,\ldots,v_l} \otimes \mathbb{E}_{w_1,\ldots,w_k}$$

ist invariant unter der Operation der Untergruppe $\mathcal{S}_{(l,k)} \subset \mathcal{S}_r$.

Für $\sigma \in \mathcal{S}_{l+k}$ ist $\sigma K_{l,k}$ ein anderes Repräsentantensystem für $\mathcal{S}_{l+k}/\mathcal{S}_{(l,k)}$ und es folgt:

$$\begin{aligned} \sigma \bullet \left( \sum_{\tau \in K_{l,k}} \tau \bullet (\mathbb{E}_{v_1,\dots,v_l} \otimes \mathbb{E}_{w_1,\dots,w_k}) \right) &= \sum_{\tau \in \sigma K_{l,k}} \tau \bullet (\mathbb{E}_{v_1,\dots,v_l} \otimes \mathbb{E}_{w_1,\dots,w_k}) \\ &= \sum_{\tau \in K_{l,k}} \tau \bullet (\mathbb{E}_{v_1,\dots,v_l} \otimes \mathbb{E}_{w_1,\dots,w_k}) \end{aligned}$$

□

Wir schreiben

$$x * y := \sum_{\tau \in K_{l,k}} \tau \bullet (x \otimes y)$$

Diese Abbildung ist bilinear und kommutativ.

**Beispiel 2.4.2.**

(1) Sei $0 \leq k \leq r$ und $vw^{[k,r-k]} \in S_r V$ ein elementarsymmetrischer Tensor mit $v, w \in V$ und $v \neq w$. Dann gilt

$$vw^{[k,r-k]} = v^{\otimes k} * w^{\otimes r-k}$$

(2) Für $v \in V$ und $k, l \geq 0$ gilt jedoch

$$v^{\otimes k} * v^{\otimes l} = ((k,l))\, v^{\otimes k+l} = \binom{k+l}{k} v^{\otimes k+l}$$

Wir haben folgende Rechenregel:

**Lemma 2.4.3.** *Seien $v_1, v_2 \in V$.*

$$(v_1 + v_2)^{\otimes r} = \sum_{k=0}^{r} v_1^{\otimes k} * v_2^{\otimes r-k}$$

*Beweis.* Sei $M := \mathit{Abb}(\{1,\dots,r\},\{1,2\})$. Wir wissen aus Bemerkung 1.3.1, dass

$$(v_1 + v_2)^{\otimes r} = \sum_{f \in M} v_{f(1)} \otimes \dots \otimes v_{f(r)}$$

Jeder einzelne Summand ist ein zerlegbarer Tensor. Wir können ohne Einschränkung $v_1 \neq v_2$ voraussetzen.

Wie wir wissen, besteht die Summe $\sum_{f \in M} v_{f(1)} \otimes \dots \otimes v_{f(r)}$ aus $2^r$ paarweise verschiedenen Summanden. Der elementarsymmetrische Tensor $v_1^{\otimes k} * v_2^{\otimes r-k}$ besteht aus $\binom{r}{k}$ paarweise verschiedenen Summanden. Nach dem binomischen Lehrsatz haben die beiden Summen $\sum_{f \in M} v_{f(1)} \otimes \dots \otimes v_{f(r)}$ und $\sum_{k=0}^{r} v_1^{\otimes k} * v_2^{\otimes r-k}$ die gleiche Anzahl an Summanden und offensichtlich kommt jeder Summand aus $\sum_{f \in M} v_{f(1)} \otimes \dots \otimes v_{f(r)}$ auch einmal in der Summe $\sum_{k=0}^{r} v_1^{\otimes k} * v_2^{\otimes r-k}$ vor. □

**Bemerkung 2.4.4.** Seien $r, n \geq 0$ und $v_1 + \dots + v_n \in V$, dann erhält man durch Iteration die Formel

$$(v_1 + \dots + v_n)^{\otimes r} = \sum_{\alpha_{(r,n)} \in \mathcal{P}'_{(r,n)}} v_1 \dots v_n^{[\alpha_{(r,n)}]}$$

Nachdem wir uns mit einzelnen Elementen dieser Algebra auseinander gesetzt haben, werden wir uns jetzt mit den einzelnen Summanden in der direkten-Summen-Zerlegung beschäftigen. Seien dazu $V_1, \dots, V_r$ freie $R$-Moduln von endlichem Rang. Dann bezeichnen wir ähnlich wie in Abschnitt 2.1

$$\sigma \bullet (V_1 \otimes \dots \otimes V_r) := V_{\sigma^{-1}1} \otimes \dots \otimes V_{\sigma^{-1}r} \quad \text{für } \sigma \in \mathcal{S}_r$$

Auch in diesem Fall haben wir ein besonderes Interesse an der direkten Summe

$$\bigoplus_{\kappa \in K_{\alpha(r,l)}} \kappa \bullet (V_1^{\otimes \alpha_1} \otimes \ldots \otimes V_l^{\otimes \alpha_l}) \quad \text{für } \alpha_{(r,l)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathcal{P}_{(r,l)}$$

Wir werden uns ausführlich mit dem Fall $l = 2$ beschäftigen und betrachten den $R$-Modul

$$\bigoplus_{\kappa \in K_{(k,r-k)}} \kappa \bullet (V_1^{\otimes k} \otimes V_2^{\otimes r-k})$$

Analog zu Lemma 2.4.3 können wir sehen, dass

$$T_R^r(V_1 \oplus V_2) = \bigoplus_{k=0}^{r} \bigoplus_{\kappa \in K_{(k,r-k)}} \kappa \bullet (V_1^{\otimes k} \otimes V_2^{\otimes r-k})$$

Aus Abschnitt 1.2 wissen wir, dass die Menge $K_{(k,r-k)}$ genau $((k, r-k))$ Elemente enthält. Um die folgenden Ergebnisse besser formulieren zu können, werden wir sie durchnummerieren. Wir setzen

$$K_{(k,r-k)} = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_{((k,r-k))}\}$$

wobei wir annehmen, dass $\kappa_1 = id$ ist. Die Elemente in

$$\bigoplus_{i=1}^{((k,r-k))} \kappa_i \bullet (V_1^{\otimes k} \otimes V_2^{\otimes r-k})$$

werden wir mit

$$x^1 \otimes y^1 + \cdots + x^{((k,r-k))} \otimes y^{((k,r-k))}$$

bezeichnen, wobei $x^i \otimes y^i \in \kappa_i \bullet (V_1^{\otimes k} \otimes V_2^{\otimes r-k})$ ist.

Offensichtlich ist

$$\kappa_j(x^1 \otimes y^1) \in \kappa_j \bullet (V_1^{\otimes k} \otimes V_2^{\otimes r-k}) \quad \text{für } 1 \leq j \leq ((k, r-k))$$

bzw.

$$\kappa_j(v^i \otimes w^i) \in (\kappa_j \circ \kappa_i) \bullet (V_1^{\otimes k} \otimes V_2^{\otimes r-k}) \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq ((k, r-k))$$

(Man beachte, dass $\kappa_j \circ \kappa_i$ im Allgemeinen kein Element aus $K_{(k,r-k)}$ ist! Wir schreiben $\kappa_j \circ \kappa_i$ stellvertretend für das Element aus $K_{(k,r-k)}$, das mit $\kappa_j \circ \kappa_i$ in einer Restklasse liegt.)

Wir betrachten nun den $R$-Modul

$$\left( \bigoplus_{i=1}^{((k,r-k))} \kappa_i \bullet (V_1^{\otimes k} \otimes V_2^{\otimes r-k}) \right)^{\mathcal{S}_r}$$

Der nächsten Bemerkung werden wir entnehmen können, dass dieser $R$-Modul nicht der Nullmodul ist, wenn $V_1, V_2 \neq \{0\}$ und $r > 0$ ist.

Für $k = r$ haben wir

$$\left( \bigoplus_{i=1}^{((k,r-k))} \kappa_i \bullet (V_1^{\otimes k} \otimes V_2^{\otimes r-k}) \right)^{\mathcal{S}_r} = S_r V_1$$

**Bemerkung 2.4.5.** Sei $0 \leq k \leq r$ und seien $x \in S_k V_1$ und $y \in S_{r-k} V_2$, dann ist

$$\sum_{i=1}^{((k,r-k))} \kappa_i \bullet (x \otimes y) \in \left( \bigoplus_{i=1}^{((k,r-k))} \kappa_i \bullet (V_1^{\otimes k} \otimes V_2^{\otimes r-k}) \right)^{\mathcal{S}_r}$$

*Beweis.* Der Beweis hierzu ist genau wie der Beweis zu Lemma 2.4.1 eine leichte Abwandlung des Beweises von Lemma 2.1.4. Wir rechnen diese Behauptung auf elementarsymmetrischen Tensoren nach, indem wir $\mathbb{E}_{v_1,\dots,v_k} \in S_k V_1$ und $\mathbb{E}_{w_1,\dots,w_{r-k}} \in S_{r-k}V_2$ betrachten. Das Element $\mathbb{E}_{v_1,\dots,v_k} \otimes \mathbb{E}_{w_1,\dots,w_{r-k}}$ ist invariant unter der Operation der Untergruppe $\mathcal{S}_{(k,r-k)}$, und folglich hängt der Ausdruck

$$\sum_{\tau \in K_{(k,r-k)}} \tau \bullet (\mathbb{E}_{v_1,\dots,v_k} \otimes \mathbb{E}_{w_1,\dots,w_{r-k}})$$

nicht von der Wahl von $K_{(k,r-k)}$ als ein Repräsentantensystem für $\mathcal{S}_r/\mathcal{S}_{(k,r-k)}$ ab. Für $\sigma \in \mathcal{S}_r$ ist $\sigma K_{(k,r-k)}$ ein anderes Repräsentantensystem. □

**Bemerkung 2.4.6.** Sei $0 \le k \le r$ und

$$x^1 \otimes y^1 + \cdots + x^{((k,r-k))} \otimes y^{((k,r-k))} \in \left( \bigoplus_{i=1}^{((k,r-k))} \kappa_i \bullet (V_1^{\otimes k} \otimes V_2^{\otimes r-k}) \right)^{\mathcal{S}_r}$$

Dann ist

$$\kappa_i(x^1 \otimes y^1) = x^i \otimes y^i \quad \text{für } i = 1, \dots, ((k, r-k))$$

*Beweis.* Da $x^1 \otimes y^1 + \cdots + x^{((k,r-k))} \otimes y^{((k,r-k))}$ invariant unter $\mathcal{S}_r$ ist und

$$\kappa_j(x^i \otimes y^i) \in (\kappa_j \circ \kappa_i) \bullet (V_1^{\otimes k} \otimes V_2^{\otimes r-k}) \quad \text{für } 1 \le i, j \le ((k, r-k))$$

folgt die Behauptung. □

**Lemma 2.4.7.** *Sei* $0 \le k \le r$.

$$S_k V_1 \otimes S_{r-k} V_2 \simeq \left( \bigoplus_{i=1}^{((k,r-k))} \kappa_i \bullet (V_1^{\otimes k} \otimes V_2^{\otimes r-k}) \right)^{\mathcal{S}_r}$$

*Beweis.* Sei

$$x^1 \otimes y^1 + \cdots + x^{((k,r-k))} \otimes y^{((k,r-k))} \in \left( \bigoplus_{i=1}^{((k,r-k))} \kappa_i \bullet (V_1^{\otimes k} \otimes V_2^{\otimes r-k}) \right)^{\mathcal{S}_r}$$

Dann ist nach der letzten Bemerkung 2.4.6

$$x^1 \otimes y^1 + \cdots + x^{((k,r-k))} \otimes y^{((k,r-k))} = \sum_{i=1}^{((k,r-k))} \kappa_i \bullet (x^1 \otimes y^1)$$

Das Element $x^1 \otimes y^1 \in T^k V_1 \otimes T^{r-k} V_2$ ist dabei ein Element aus $S_k V_1 \otimes S_{r-k} V_2$, denn wenn die Summe $\sum_{i=1}^{((k,r-k))} \kappa_i \bullet (x^1 \otimes y^1)$ invariant unter der Operation der Gruppe $\mathcal{S}_r$ ist, ist sie insbesondere invariant unter der Operation von $\mathcal{S}_{(k,r-k)}$. Sei $\sigma \in \mathcal{S}_{(k,r-k)} \subseteq \mathcal{S}_r$. Dann ist

$$\sigma \bullet \left( \sum_{i=1}^{((k,r-k))} \kappa_i \bullet (x^1 \otimes y^1) \right) = \sum_{i=1}^{((k,r-k))} \kappa_i \bullet (x^1 \otimes y^1)$$

und weil $\sigma \bullet x^1 \otimes y^1 \in T^k V_1 \otimes T^{r-k} V_2$ ist, folgt

$$\sigma \bullet x^1 \otimes y^1 = x^1 \otimes y^1$$

Nun ist

$$\sum_{i=1}^{((k,r-k))} \kappa_i \bullet (x^1 \otimes y^1) \longmapsto x^1 \otimes y^1 \longmapsto \sum_{i=1}^{((k,r-k))} \kappa_i \bullet (x^1 \otimes y^1)$$

die Identität auf $\left(\bigoplus_{i=1}^{((k,r-k))}\kappa_i\bullet(V_1^{\otimes k}\otimes V_2^{\otimes r-k})\right)^{\mathcal{S}_r}$. Die Abbildung

$$x\otimes y\longmapsto\sum_{i=1}^{((k,r-k))}\kappa_i\bullet(x\otimes y)\quad\text{für } x\otimes y\in S_kV_1\otimes S_{r-k}V_2$$

ist offensichtlich injektiv, also folgt die Behauptung. □

Offensichtlich gibt es eine kanonische $R$-lineare Abbildung

$$S_rV\longrightarrow S_r(V\oplus W)\quad\text{vermöge } v_1\dots v_l^{[\alpha_{(r,l)}]}\mapsto(v_1,0)\dots(v_l,0)^{[\alpha_{(r,l)}]}$$

für elementarsymmetrische Tensoren $v_1\dots v_l^{[\alpha_{(r,l)}]}\in S_rV$.

**Satz 2.4.8.** *Seien $V$ und $W$ freie $R$-Moduln von endlichem Rang und $r\geq 0$. Dann ist*

$$\bigoplus_{k=0}^{r}(S_kV_1\otimes S_{r-k}V_2)\simeq S_r(V_1\oplus V_2)\quad\textit{vermöge}\quad\sum_{k=0}^{r}x_k\otimes y_k\mapsto\sum_{k=0}^{r}(x_k,0)*(0,y_k)$$

*für $x_k\in S_kV_1$ und $y_k\in S_{r-k}V_2$ für alle $k=0,\dots,r$.*

*Beweis.*

$$\begin{aligned}S_r(V_1\oplus V_2)&=\left(T_R^r(V_1\oplus V_2)\right)^{\mathcal{S}_r}\\&=\left(\bigoplus_{k=0}^{r}\bigoplus_{i=1}^{((k,r-k))}\kappa_i\bullet(V_1^{\otimes k}\otimes V_2^{\otimes r-k})\right)^{\mathcal{S}_r}\\&=\bigoplus_{k=0}^{r}\left(\bigoplus_{i=1}^{((k,r-k))}\kappa_i\bullet(V_1^{\otimes k}\otimes V_2^{\otimes r-k})\right)^{\mathcal{S}_r}\\&\overset{\text{Lemma 2.4.7}}{\simeq}\bigoplus_{k=0}^{r}S_kV_1\otimes S_{r-k}V_2\end{aligned}$$

Aus Lemma 2.4.7 folgt ebenfalls die oben genannte Abbildungsvorschrift. □

**Bemerkung 2.4.9.** Sei $\alpha_{(r,l)}=(\alpha_1,\dots,\alpha_l)\in\mathcal{P}_{(r,l)}$, dann gibt es offensichtlich eine Isomorphie

$$\left(\bigoplus_{\kappa\in K_{\alpha(r,l)}}\kappa\bullet(V_1^{\otimes\alpha_1}\otimes\dots\otimes V_l^{\otimes\alpha_l})\right)^{\mathcal{S}_r}\simeq S_{\alpha_1}V_1\otimes\dots\otimes S_{\alpha_l}V_l$$

**Korollar 2.4.10.** *Seien $V_1,\dots,V_n$ freie $R$-Moduln, dann erhält man analog zu Bemerkung 2.4.4 und Satz 2.4.8 aus der letzten Bemerkung, dass*

$$S_r\left(\bigoplus_{i=1}^{n}V_i\right)\simeq\bigoplus_{\alpha_{(r,n)}\in\mathcal{P}'_{(r,n)}}(S_{\alpha_1}V_1\otimes\dots\otimes S_{\alpha_n}V_n)$$

2.5. **Der Funktor $S_r$.** Den Übergang von einem $R$-Modul $V$ in einen $R$-Modul $S_r(V|R)$ kann man auch als einen kovarianten Funktor von der Kategorie der $R$-Moduln in sich sehen. Wir bilden $V$ und $f\colon V\longrightarrow W$ für zwei $R$-Moduln $V,W$ wie folgt ab:

$$\begin{aligned}V&\longmapsto S_r(V|R)\\f\colon V\to W&\longmapsto S_r(f|R):=f^{\otimes r}|_{S_r(V|R)}\colon S_r(V|R)\to S_r(W|R)\end{aligned}$$

Für $f\colon V\longrightarrow W$ und $g\colon W\longrightarrow U$ sehen wir sofort

$$S_r(id_V)=(id_V)^{\otimes r}|_{S_rV}=id_{V^{\otimes r}}|_{S_rV}=id_{S_rV}$$

$$S_r(g\circ f)=(g\circ f)^{\otimes r}|_{S_rV}=(g^{\otimes r}\circ f^{\otimes r})|_{S_rV}=g^{\otimes r}|_{S_rW}\circ f^{\otimes r}|_{S_rV}=S_rg\circ S_rf$$

Wie wir in Abschnitt 2.3 gesehen haben, erhält dieser Funktor einen Grundringwechsel.

Wir werden uns jetzt etwas mit den Folgerungen beschäftigen, die aus dem Grundringwechsel resultieren. Speziell beschäftigen wir uns mit dem Polynomring

$$R[t_1, \dots, t_m]$$

von dem wir wissen, dass dort die Monome eine $R$-Basis bilden. Für einen beliebigen $R$-Modul $V$ haben wir

$$V[t_1, \dots, t_m] = \bigoplus_{k_1+\cdots+k_m \geq 0} V \otimes t_1^{k_1} \cdots t_m^{k_m} \qquad \text{mit } k_1, \dots, k_m \geq 0$$

Insbesondere haben wir nach Korollar 2.3.2

$$S_r(V[t_1, \dots, t_m] | R[t_1, \dots, t_m]) \simeq \bigoplus_{k_1+\cdots+k_m=r} S_r(V|R) \otimes t_1^{k_1} \cdots t_m^{k_m}$$

Sei $v_1, \dots, v_r \in V$. Wir setzen

$$\overline{v} := v_1 t_1 + \cdots + v_m t_m \in V[t_1, \dots, t_m]$$

Dann ist unter dieser kanonischen Isomorphie

$$\overline{v}^{\otimes r} \longmapsto \sum_{k_1+\cdots+k_m=r} v_1 \cdots v_m^{[k_1,\dots,k_m]} \otimes t_1^{k_1} \cdots t_m^{k_m} \in S_r(V|R) \otimes R[t_1, \dots, t_m]$$

dabei sind $k_1, \dots, k_m \geq 0$ (vgl. Bemerkung 2.4.4).

Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes werden wir $T_A^r(V \otimes A)$ und $T_R^r V \otimes A$ über die kanonische Isomorphie aus Satz 1.3.5 miteinander identifizieren.

**Satz 2.5.1.** *Sei $V$ ein freier $R$-Modul vom Rang $m$ und $U \subseteq S_r V$ ein Untermodul mit der Eigenschaft, dass*

$$\widehat{v}^{\otimes r} \in U \otimes_R A \quad \textit{für jede } R\textit{-Algebra } A \textit{ und alle } \widehat{v} \in V \otimes_R A$$

*Dann ist*

$$U = S_r V$$

*Beweis.* Sei $A = R[t_1, \dots, t_m]$ und $\overline{v} \in V[t_1, \dots, t_m]$ wie oben. Wir wissen

$$\overline{v}^{\otimes r} \longmapsto \sum_{k_1+\cdots+k_m=r} v_1 \cdots v_m^{[k_1,\dots,k_m]} \otimes t_1^{k_1} \cdots t_m^{k_m} \in U \otimes R[t_1, \dots, t_m]$$

mit nichtnegativen $k_1, \dots, k_m$. Wir identifizieren $v_1 \cdots v_m^{[k_1,\dots,k_m]}$ gemäß Abschnitt 2.1 mit einem elementarsymmetrischen Tensor aus $S_r V$. Unsere Annahme liefert, dass

$$v_1 \cdots v_m^{[k_1,\dots,k_m]} \in U$$

Wir können die $v_1, \dots, v_m \in V$ beliebig variieren. Nach Bemerkung 2.2.1 lassen wir dadurch die Tensoren $v_1 \cdots v_m^{[k_1,\dots,k_m]} \in U$ ein Erzeugendensystem von $S_r V$ durchlaufen. Folglich gilt: $U = S_r V$ □

**Satz 2.5.2.** *Sei $V$ ein freier $R$-Modul vom Rang $m$, $W$ ein beliebiger $R$-Moduln und $h\colon S_r V \longrightarrow W$ $R$-linear. Angenommen*

$$h_A(\widehat{v}^{\otimes r}) = 0 \qquad \textit{für jede } R\textit{-Algebra } A \textit{ und alle } \widehat{v} \in V \otimes_R A$$

*Dann ist schon $h = 0$.*

*Beweis.* Sei $A = R[t_1, \dots, t_m]$ und $\overline{v} \in V[t_1, \dots, t_m]$ wie oben.

$$\begin{aligned} 0 = h_A(\overline{v}^{\otimes r}) &= \sum_{k_1+\cdots+k_m=r} h_A(v_1 \cdots v_m^{[k_1,\dots,k_m]} \otimes t_1^{k_1} \cdots t_m^{k_m}) \\ &= \sum_{k_1+\cdots+k_m=r} h(v_1 \cdots v_m^{[k_1,\dots,k_m]}) \otimes t_1^{k_1} \cdots t_m^{k_m} \end{aligned}$$

mit nichtnegativen $k_1, \dots, k_m$.

Auf Grund der linearen Unabhängigkeit der $t_1^{k_1} \cdots t_m^{k_m}$ folgt aus der Annahme, dass

$$h(v_1 \cdots v_m^{[k_1,\dots,k_m]}) = 0$$

Der Beweisschluss läuft nun analog zu dem vorhergegangenen Beweis. Wenn wir die $v_1, \dots, v_m$ den Modul $V$ durchlaufen lassen, durchläuft $v_1 \cdots v_m^{[k_1,\dots,k_m]}$ ein Erzeugendensystem von $S_rV$. Damit ist $h(x) = 0$ für jedes $x \in S_rV$. □

**Korollar 2.5.3.** *Sei $V$ ein freier $R$-Modul von endlichem Rang und $g\colon S_rV \longrightarrow W$ eine weitere lineare Abbildung, dann ist insbesondere*

$$h = g$$

*wenn* $\quad h_A(\widehat{v}^{\otimes r}) = g_A(\widehat{v}^{\otimes r}) \quad$ *für jede $R$-Algebra $A$ und alle $\widehat{v} \in V \otimes_R A$.*

Mit dieser Bemerkung folgt sofort der nächste Satz:

**Satz 2.5.4.** *Sei $V$ ein freier $R$-Modul von endlichem Rang und $f: V \longrightarrow W$ eine $R$-lineare Abbildung in einen weiteren $R$-Modul $W$. Dann ist die $R$-lineare Abbildung*

$$S_rf\colon S_rV \longrightarrow S_rW \quad \textit{vermöge } v_1 \dots v_l^{[\alpha_{(r,l)}]} \mapsto f(v_1) \dots f(v_l)^{[\alpha_{(r,l)}]}$$

*die einzige $R$-lineare Abbildung*

$$S_rV \longrightarrow S_rW \quad \textit{mit } \widehat{v}^{\otimes r} \mapsto f_A(\widehat{v})^{\otimes r}$$

*für jede $R$-Algebra $A$ und alle $\widehat{v} \in V \otimes_R A$.*

*Ist $f$ ein $R$-Isomorphismus, dann ist es auch $S_rf$.*

*Beweis.* Wir wissen, dass $f^{\otimes r}\big|_{S_rV} =: S_rf$ der Abbildungsvorschrift genügt. Indem wir $T_A^r(V \otimes A)$ und $T_R^rV \otimes A$ miteinander identifizieren, identifizieren wir auch $S_r(f_A)$ mit $S_rf_A$ (bzw. $(f_A)^{\otimes r}$ mit $f_A^{\otimes r}$). Dass $S_rf$ durch diese Eigenschaft eindeutig festgelegt ist, haben wir in der Bemerkung direkt vor diesem Satz erklärt.

Die Behauptungen über die Isomorphie sind offensichtlich. □

**Beispiel 2.5.5.** Seien $V$ und $W$ freie $R$-Moduln von endlichem Rang.

Die Abbildung

$$S_rV \longrightarrow S_r(V \oplus W) \quad \text{vermöge } v_1 \dots v_l^{[\alpha_{(r,l)}]} \mapsto (v_1, 0) \dots (v_l, 0)^{[\alpha_{(r,l)}]}$$

(für elementarsymmetrische Tensoren $v_1 \dots v_l^{[\alpha_{(r,l)}]} \in S_rV$), die wir vor Satz 2.4.8 eingeführt haben ist auf diese Weise aus der Abbildung

$$V \longrightarrow V \oplus W \quad \text{vermöge } v \mapsto (v, 0)$$

hervorgegangen.

## 3. Bilinearformen

3.1. **Symmetrische Bilinearformen.** Sei $R$ ein kommutativer Ring, und seien $V, W$ und $M$ $R$-Moduln. Wir werden uns nun ausführlich mit bilinearen Abbildungen $\beta\colon V \times W \longrightarrow M$ bzw. besonders mit symmetrischen Bilinearformen $\beta\colon V \times V \longrightarrow R$ beschäftigen.

**Lemma 3.1.1.** *Seien $V_1, \dots, V_l, W_1, \dots, W_l, M_1, \dots, M_l$ $R$-Moduln, und seien für $i = 1, \dots, l$ die Abbildungen $\beta_i\colon V_i \times W_i \longrightarrow M_i$ $R$-bilinear. Dann gibt es genau eine bilineare Abbildung*

$$\beta_1 \otimes \ldots \otimes \beta_l\colon \bigotimes_{i=1}^{l} V_i \times \bigotimes_{i=1}^{l} W_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{l} M_i$$

$$\textit{mit} \quad \beta_1 \otimes \ldots \otimes \beta_l(v_1 \otimes \ldots \otimes v_l, w_1 \otimes \ldots \otimes w_l) = \beta_1(v_1, w_1) \otimes \ldots \otimes \beta_l(v_l, w_l)$$

*Beweis.* Die $2l$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} B\colon V_1 \times \cdots \times V_l \times W_1 \times \cdots \times W_l & \longrightarrow & M_1 \otimes \ldots \otimes M_l \\ (v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_l) & \mapsto & \beta_1(v_1, w_1) \otimes \ldots \otimes \beta_l(v_l, w_l) \end{array}$$

induziert folgende eindeutige lineare Abbildung auf dem Tensorprodukt:

$$\begin{array}{rcl} B'\colon V_1 \otimes \ldots \otimes V_l \otimes W_1 \otimes \ldots \otimes W_l & \longrightarrow & M_1 \otimes \ldots \otimes M_l \\ (v_1 \otimes \ldots \otimes v_l \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_l) & \mapsto & \beta_1(v_1, w_1) \otimes \ldots \otimes \beta_l(v_l, w_l) \end{array}$$

Diese Abbildung entspricht eindeutig der gesuchten bilinearen Abbildung

$$\beta_1 \otimes \ldots \otimes \beta_l\colon V_1 \otimes \ldots \otimes V_l \times W_1 \otimes \ldots \otimes W_l \longrightarrow M_1 \otimes \ldots \otimes M_l$$ □

Insbesondere gibt es durch die Isomorphie $R^{\otimes r} \simeq R$ zu einer Bilinearform

$$\beta\colon V \times W \longrightarrow R$$

genau eine Bilinearform

$$\beta^{\otimes r}\colon V^{\otimes r} \times W^{\otimes r} \longrightarrow R \quad \text{mit } \beta^{\otimes r}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r, w_1 \otimes \ldots \otimes w_r) = \prod_{i=1}^{r} \beta(v_i, w_i)$$

**Beispiel 3.1.2.** Die bilineare Abbildung

$$\Phi\colon \operatorname{End}_R(V) \times V \longrightarrow V \quad \text{vermöge } (f, v) \mapsto f(v)$$

induziert eine entsprechende bilineare Abbildung auf den Tensorpotenzen

$$\begin{array}{rrcl} & \Phi^{\otimes r}\colon \operatorname{End}_R(V)^{\otimes r} \times V^{\otimes r} & \longrightarrow & V^{\otimes r} \\ \text{mit} & \Phi^{\otimes r}(f_1 \otimes \ldots \otimes f_r, v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) & = & f_1(v_1) \otimes \ldots \otimes f_r(v_r) \end{array}$$

**Bemerkung 3.1.3.** Sei $\beta\colon V \times W \longrightarrow M$ eine bilineare Abbildung und $\sigma \in \mathcal{S}_r$. Dann gilt für zwei zerlegbare Tensoren $v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \in V$ und $w_1 \otimes \ldots \otimes w_r \in W^{\otimes r}$ folgende Identität:

$$\sigma \bullet \beta^{\otimes r}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r, w_1 \otimes \ldots \otimes w_r) = \beta^{\otimes r}\big(\sigma \bullet v_1 \otimes \ldots \otimes v_r, \sigma \bullet w_1 \otimes \ldots \otimes w_r\big)$$

(Das beweist diese Identität auch für beliebige Tensoren aus $V^{\otimes r}$ und $W^{\otimes r}$.)

*Beweis.*

$$\begin{array}{rl} & \sigma \bullet \beta^{\otimes r}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r, w_1 \otimes \ldots \otimes w_r) \\ = & \sigma \bullet \beta(v_1, w_1) \otimes \ldots \otimes \beta(v_r, w_r) \\ = & \beta(v_{\sigma^{-1}1}, w_{\sigma^{-1}1}) \otimes \ldots \otimes \beta(v_{\sigma^{-1}r}, w_{\sigma^{-1}r}) \\ = & \beta^{\otimes r}(v_{\sigma^{-1}1} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}r}, w_{\sigma^{-1}1} \otimes \ldots \otimes w_{\sigma^{-1}r}) \\ = & \beta^{\otimes r}\big(\sigma \bullet v_1 \otimes \ldots \otimes v_r, \sigma \bullet w_1 \otimes \ldots \otimes w_r\big) \end{array}$$

□

Durch diese Bemerkung erhalten wir Folgendes:

**Lemma 3.1.4.** *Zu jeder $R$-bilinearen Abbildung $\beta\colon V \times W \longrightarrow M$ existiert eine $R$-bilineare Abbildung*

$$\begin{aligned} S_r\beta := \beta^{\otimes r}\big|_{S_rV\times S_rW}\colon S_rV \times S_rW &\longrightarrow S_rM \\ \textit{mit} \qquad S_r\beta\big(v^{\otimes r}, w^{\otimes r}\big) &= \beta(v,w)^{\otimes r} \end{aligned}$$

3.2. **Einige Berechnungen zu $S_r\beta$.** Sei $V$ ein freier $R$-Modul mit Basis $b_1, \dots, b_n$ und $W$ ein freier $R$-Modul mit Basis $c_1, \dots, c_m$. Weiter sei $\beta\colon V \times W \longrightarrow M$ eine $R$-Bilinearform. Wir berechnen zunächst einen Spezialfall von

$$S_r\beta : S_rV \times S_rW \longrightarrow S_rM$$

**Beispiel 3.2.1.** Seien $b_{i_1\dots i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]} \in S_rV$ und $c_1^{\otimes r} \in S_rW$ elementarsymmetrische Tensoren. Wir erhalten Folgendes:

$$\begin{aligned} S_r\beta\big(b_{i_1\dots i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]}, c_1^{\otimes r}\big) &= \sum_{\sigma\in K_{i_1,\dots,i_l}} \beta^{\otimes r}\big(\sigma \bullet (b_{i_1}^{\otimes i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_l}^{\otimes i_l}), c_1^{\otimes r}\big) \\ &= \sum_{\sigma\in K_{i_1,\dots,i_l}} \sigma \bullet \big(\beta(b_{i_1}, c_1)^{\otimes i_1} \otimes \dots \otimes \beta(b_{i_l}, c_1)^{\otimes i_l}\big) \\ &= \big(\beta(b_{i_1}, c_1) \dots \beta(b_{i_l}, c_1)\big)^{[\alpha_{(r,l)}]} \end{aligned}$$

In dem Spezialfall $M = R$ erhalten wir mit Hilfe der kanonischen Isomorphie $\varphi_R\colon R^{\otimes r} \simeq R$

$$\varphi_R \circ S_r\beta\,\big(b_{i_1\dots i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]}, c_1^{\otimes r}\big) = ((\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_l})) \prod_{k=1}^{l} \beta(b_{i_k}, c_1)^{\alpha_{i_k}}$$

**Beispiel 3.2.2.** Seien $b_{i_1\dots i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]} \in S_rV, c_{j_1\dots j_k}^{[\alpha'_{(r,k)}]} \in S_rW$ elementarsymmetrische Tensoren. Wir werden nun $S_r\beta\big(b_{i_1\dots i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]}, c_{j_1\dots j_k}^{[\alpha'_{(r,k)}]}\big)$ ausrechnen.

Wir setzen

$$b'_1 \otimes \dots \otimes b'_n := b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_1} \otimes b_{i_2} \otimes \dots \otimes b_{i_l}$$

und

$$c'_1 \otimes \dots \otimes c'_n := c_{j_1} \otimes \dots \otimes c_{j_1} \otimes c_{j_2} \otimes \dots \otimes c_{j_k}$$

und wir sehen

$$\begin{aligned} &S_r\beta\big(b_{i_1\dots i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]}, c_{j_1\dots j_k}^{[\alpha'_{(r,k)}]}\big) \\ = &\sum_{\sigma\in K_{i_1,\dots,i_l}} \sum_{\sigma'\in K_{j_1,\dots,j_k}} \beta^{\otimes r}\big(\sigma \bullet (b'_1 \otimes \dots \otimes b'_n), \sigma' \bullet (c'_1 \otimes \dots \otimes c'_n)\big) \\ = &\sum_{\sigma\in K_{i_1,\dots,i_l}} \sum_{\sigma'\in K_{j_1,\dots,j_k}} \beta(b'_{\sigma^{-1}1}, c'_{\sigma'^{-1}1}) \otimes \dots \otimes \beta(b'_{\sigma^{-1}n}, c'_{\sigma'^{-1}n}) \\ = &\sum_{\sigma\in K_{i_1,\dots,i_l}} \sum_{\sigma'\in K_{j_1,\dots,j_k}} \bigotimes_{d=1}^{n} \beta(b'_{\sigma^{-1}d}, c'_{\sigma'^{-1}d}) \end{aligned}$$

In dem Spezialfall $M = R$ erhalten wir mit Hilfe der kanonischen Isomorphie $\varphi_R\colon R^{\otimes r} \simeq R$

$$\varphi_R \circ S_r\beta\big(b_{i_1\dots i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]}, c_{j_1\dots j_k}^{[\alpha'_{(r,k)}]}\big) = \sum_{\sigma\in K_{i_1,\dots,i_l}} \sum_{\sigma'\in K_{j_1,\dots,j_k}} \prod_{d=1}^{n} \beta(b'_{\sigma^{-1}d}, c'_{\sigma'^{-1}d})$$

Der Tensor

$$\sum_{\sigma\in K_{i_1,\dots,i_l}}\ \sum_{\sigma'\in K_{j_1,\dots,j_k}}\ \bigotimes_{d=1}^{n}\beta(b'_{\sigma^{-1}d},c'_{\sigma'^{-1}d})\in M^{\otimes r}$$

ist offensichtlich ein symmetrischer Tensor. Aber wie sieht es aus, wenn wir

$$S_r\beta\big(b^{[\alpha_{(r,l)}]}_{i_1\dots i_l},c^{[\alpha'_{(r,k)}]}_{j_1\dots j_k}\big)\in S_rM$$

durch Partitionen von $r$ angeben möchten? Dazu werden wir mit den in Unterabschnitt 1.2.1 eingeführten erweiterten Partition arbeiten und den Begriff der symmetrischen Tensoren so benutzen, wie wir es in Abschnitt 2.1 in diesem Zusammenhang erwähnt haben.

**Bemerkung 3.2.3.** Seien $b^{[\alpha_{(r,l)}]}_{i_1\dots i_l}\in S_rV, c^{[\alpha'_{(r,k)}]}_{j_1\dots j_k}\in S_rW$ Basisvektoren.

$$\begin{aligned}S_r\beta\big(b^{[\alpha_{(r,l)}]}_{i_1\dots i_l},c^{[\alpha'_{(r,k)}]}_{j_1\dots j_k}\big) &= \sum_{\sigma\in K_{i_1,\dots,i_l}}\ \sum_{\sigma'\in K_{j_1,\dots,j_k}}\beta^{\otimes r}\big(\sigma\bullet b^{[\alpha_{(r,l)}]}_{i_1\dots i_l},\sigma'\bullet c^{[\alpha'_{(r,k)}]}_{j_1\dots j_k}\big)\\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma}\big(\beta(b_{i_1},c_{j_1})\otimes\ldots\otimes\beta(b_{i_l},c_{j_k})\big)^{[\gamma]}\end{aligned}$$

wobei

$$\Gamma=\left\{\gamma\in\mathbb{N}^{l\times k}\ \middle|\ \gamma\in\mathcal{P}'_{(r,l+k)},\ \sum_{1\le s\le l}\gamma_{st}=\alpha'_{j_t}\ \text{und}\ \sum_{1\le t\le k}\gamma_{st}=\alpha_{i_s}\right\}$$

Mit Hilfe der kanonischen Isomorphie $\varphi_R\colon R^{\otimes r}\simeq R$ erhalten wir dann:

$$\varphi_R\circ S_r(\beta)\big(b^{[\alpha_{(r,l)}]}_{i_1\dots i_l},c^{[\alpha'_{(r,k)}]}_{j_1\dots j_k}\big)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\frac{r!}{\gamma_{11}!\cdots\gamma_{lk}!}\prod_{\substack{1\le s\le l\\ 1\le t\le k}}\beta(b_{i_s},c_{i_t})^{\gamma_{st}}$$

*Beweis.* Vgl. hierzu [7]. □

Wir werden später noch einen Spezialfall mit $\alpha_{(r,l)}=\alpha'_{(r,k)}=(1,\dots,1)$ nachrechnen.

3.3. **Einige wichtige Eigenschaften von $S_r\beta$.** Seien $V,W$ und $M$ $R$-Moduln, sei $A$ eine $R$-Algebra, und sei $\beta\colon V\times W\longrightarrow M$ eine $R$-Bilinearform. Dann gibt es genau eine $A$-bilineare Abbildung

$$\beta_A\colon V\otimes_R A\times W\otimes_R A\longrightarrow M\otimes_R A\qquad\text{mit } \beta_A(v\otimes a,w\otimes b)=\beta(v,w)\otimes ab$$

Mit Hilfe der $A$-bilinearen Abbildung $\lambda^A\colon A\times A\to A$, die durch die Multiplikation auf $A$ gegeben ist, können wir $\beta_A$ wie folgt darstellen:

$$\beta_A:=\beta\otimes\lambda^A$$

**Bemerkung 3.3.1.** Sei $\beta'\colon V'\times W'\longrightarrow M'$ eine weitere $R$-bilineare Abbildung, dann ist offensichtlich

$$(\beta\otimes\beta')_A=\beta_A\otimes\beta'_A$$

**Bemerkung 3.3.2.** Folgendes Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc}(S_r\beta)_A\colon S_r(V|R)\otimes_R A\times S_r(W|R)\otimes_R A & \longrightarrow & S_r(M|R)\otimes_R A\\ \big\downarrow\simeq & & \big\downarrow\simeq\\ S_r(\beta_A)\colon S_r(V\otimes_R A|A)\times S_r(W\otimes_R A|A) & \longrightarrow & S_r(M\otimes_R A|A)\end{array}$$

Wenn wir $T^r_A(V\otimes A)$ und $T^r_RV\otimes A$ miteinander identifizieren, erhalten wir insbesondere

**Lemma 3.3.3.** *Wir haben eine $R$-bilineare Abbildung*

$$S_r\beta\colon S_rV \times S_rW \longrightarrow S_rM \quad \textit{mit } (S_r\beta)_A(\widehat{v}^{\otimes r}, \widehat{w}^{\otimes r}) = \beta_A\big(\widehat{v}, \widehat{w}\big)^{\otimes r}$$

*für jede beliebige $R$-Algebra $A$ und $\widehat{v} \in V \otimes A, \widehat{w} \in W \otimes A$.*

Sei $V = W$. Eine Bilinearform $\beta\colon V \times V \longrightarrow R$ werden wir *symmetrisch* nennen, wenn

$$\beta(v, w) = \beta(w, v) \quad \text{für alle } v, w \in V$$

**Bemerkung 3.3.4.** Offensichtlich sind $S_r\beta$ (bzw. $\beta^{\otimes r}$) und $\beta_A$ symmetrisch, wenn $\beta$ symmetrisch ist.

Wir nennen eine Bilinearform $\beta\colon V \times V \longrightarrow R$ *nicht ausgeartet*, wenn

$$\begin{aligned} \Psi^l_\beta\colon V \longrightarrow V^* \quad &\text{vermöge} \quad v \mapsto \beta(v, -) \\ \Psi^r_\beta\colon V \longrightarrow V^* \quad &\text{vermöge} \quad w \mapsto \beta(-, w) \end{aligned}$$

jeweils einen $R$-Isomorphismus beschreibt.

**Bemerkung 3.3.5.** Seien $V_1$ und $V_2$ freie $R$-Moduln von endlichem Rang, $A$ eine $R$-Algebra und $\beta_i\colon V_i \times V_i \longrightarrow R$ für $i = 1, 2$ $R$-Bilinearformen.

(1) Sind $\beta_1$ und $\beta_2$ nicht ausgeartet, so ist auch $\beta_1 \otimes \beta_2$ nicht ausgeartet.
(2) Ist $\beta_1$ nicht ausgeartet, so ist auch $(\beta_1)_A$ nicht ausgeartet.

*Beweis.* Für (1) und (2) siehe z.B. [5, Chapter I, §5]. □

Die kanonische $R$-bilineare Abbildung

$$\pi_{VW}\colon V \times W \longrightarrow (V \otimes W)$$

induziert eine $R$-bilineare Abbildung $S_r\pi_{VW}\colon S_rV \times S_rW \longrightarrow S_r(V \otimes W)$ bzw. eine $R$-lineare Abbildung

$$\varphi_{S_r\pi_{VW}}\colon S_rV \otimes S_rW \longrightarrow S_r(V \otimes W)$$

Dies ist gerade die $R$-lineare Abbildung, die von der Isomorphie

$$T^r_RV \otimes T^r_RW \simeq T^r_R(V \otimes W)$$

induziert wird; folglich ist $\varphi_{S_r\pi_{VW}}$ injektiv.

**Bemerkung 3.3.6.** Die $R$-bilineare Abbildung $S_r\beta$ faktorisiert wie folgt:

$$\begin{tikzcd} S_rV \times S_rW \arrow[r, "S_r\beta"] \arrow[d, "S_r\pi_{VW}"'] & S_rM \arrow[d, equal] \\ S_r(V \otimes W) \arrow[r, "S_r\varphi_\beta"] & S_rM \end{tikzcd}$$

**Bemerkung 3.3.7.** Seien $V', W'$ und $M'$ weitere $R$-Moduln, und sei $\beta'\colon V' \times W' \longrightarrow M'$ eine $R$-bilineare Abbildung. Dann faktorisiert die $R$-bilineare Abbildung $S_r\beta \otimes S_r\beta'$ wie folgt:

$$\begin{tikzcd} S_r\beta \otimes S_r\beta'\colon S_rV \otimes S_rV' \times S_rW \otimes S_rW' \arrow[r] \arrow[d] & S_rM \otimes S_rM' \arrow[d] \\ S_r(\beta \otimes \beta')\colon\ S_r(V \otimes V') \times S_r(W \otimes W') \arrow[r] & S_r(M \otimes M') \end{tikzcd}$$

3.4. **Symmetrische Tensoren über Algebren.** Sei $A$ eine $R$-Algebra. Dann operiert die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_r$, wie wir in Abschnitt 2.1 gesehen haben, auf $T^rA$.

3.4.1. *Der $S_rA$-Modul $S_rV$.* Sei $V$ ein $A$-Modul. Dann ist $V$ insbesondere ein $R$-Modul, und durch die Skalarmultiplikation

$$A \times V \longrightarrow V \quad \text{vermöge } a, v \mapsto av$$

ist eine $R$-bilineare Abbildung gegeben. Diese können wir wie in Abschnitt 3.1 fortsetzen und erhalten eine bilineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} A^{\otimes r} \times V^{\otimes r} & \longrightarrow & V^{\otimes r} \\ a_1 \otimes \ldots \otimes a_r, v_1 \otimes \ldots \otimes v_r & \mapsto & a_1 v_1 \otimes \ldots \otimes a_r v_r \end{array}$$

Sei $z \in A^{\otimes r}$ und $x \in V^{\otimes r}$, dann ist nach Bemerkung 3.1.3 $zx \in S_rV$, falls $z \in S_rA$ und $x \in S_rV$. Damit erhalten wir eine Abbildung

$$S_rA \times S_rV \longrightarrow S_rV \quad \text{vermöge } z, x \mapsto zx$$

Wir haben also eine $S_rA$-Modul-Struktur auf $S_rV$ gegeben.

Seien $W, M$ ebenfalls $A$-Moduln.

**Bemerkung 3.4.1.** Sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine $A$-lineare Abbildung bzw. $\beta\colon V \times W \longrightarrow M$ eine $A$-bilineare Abbildung. Dann ist die Abbildung

$$S_rf\colon S_rV \longrightarrow S_rW \quad \text{bzw.} \quad S_r\beta\colon S_rV \times S_rW \longrightarrow S_rM$$

$S_rA$-linear bzw. $S_rA$-bilinear.

3.4.2. *Die $R$-Algebra $S_rA$.* Durch die Multiplikation

$$A \times A \longrightarrow A \quad \text{vermöge } a, b \mapsto ab$$

ist eine $R$-bilineare Abbildung gegeben. Wir werden sie wie im letzten Unterabschnitt auf $S_rA$ fortsetzen und sehen eine $R$-bilineare Abbildung

$$S_rA \times S_rA \longrightarrow S_rA \quad \text{vermöge } a, b \mapsto ab$$

Wir haben also durch die Multiplikation auf $T_R^rA$ auch eine $R$-Algebra-Struktur auf $S_rA$ gegeben mit $1_{S_rA} = 1_{T_R^rA}$.

Ebenso wird $S_{\alpha_{(r,l)}}A$ für $\alpha_{(r,l)} \in \mathcal{P}_{(r,l)}$ durch komponentenweise Multiplikation zu einer $R$-Algebra. $S_{\alpha_{(r,l)}}A$ ist nicht nur eine $R$-Algebra, es lässt sich bereits aus der Definition

$$S_{\alpha_{(r,l)}}A = (\Pi^r A)^{\mathcal{S}_{\alpha_{(r,l)}}} \supseteq (\Pi^r A)^{\mathcal{S}_r} = S_rA$$

erkennen, dass $S_{\alpha_{(r,l)}}A$ eine $S_rA$-Algebra ist. Genauer ist $S_{\alpha_{(r,l)}}A$, als das Tensorprodukt der Algebren $S_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, l)$, ebenfalls eine $R$-Algebra, die $S_rA$ als $R$-Unteralgebra enthält. Wir können die Spur-Abbildung dieser Algebren für beliebige $l \geq 1$ definieren durch

$$\begin{array}{ccc} S_{\alpha_{(r,l)}}A & \longrightarrow & S_rA \\ a^1 \otimes \ldots \otimes a^l & \mapsto & \displaystyle\sum_{\kappa \in K_{\alpha_{(r,l)}}} \kappa \bullet (a^1 \otimes \ldots \otimes a^l) \quad \text{für } a^i \in S_{\alpha_i}A \ (i = 1, \ldots, l) \end{array}$$

Im Fall $l = 2$, ist dies genau die Abbildung $T_{ij}$, die von der $R$-bilinearen Abbildung

$$S_kA \times S_lA \longrightarrow S_{k+l}A \quad \text{vermöge } (x, y) \mapsto x * y$$

induziert wird. Wir erhalten

$$\mathcal{T}_{kl}\colon S_kA \otimes S_lA \longrightarrow S_{k+l}A \quad \text{mit} \qquad \mathcal{T}_{kl}(x \otimes y) = x * y$$

(Diese Abbildungen können selbstverständlich auch für $R$-Moduln statt für $R$-Algebren definiert werden.)

In diesem Kontext können wir Korollar 2.3.2 wie folgt formulieren:

**Satz 3.4.2.** *Sei $B$ eine weitere $R$-Algebra und $\alpha_{(r,l)} \in \mathcal{P}_{(r,l)}$. Dann sind folgende $B$-Algebren isomorph:*

$$S_{\alpha_{(r,l)}}(A|R) \otimes_R B \quad \simeq \quad S_{\alpha_{(r,l)}}(A \otimes_R B|B)$$

*Beweis.* Diese Aussage folgt mit Hilfe von Satz 1.3.5 sofort aus Korollar 2.3.2. □

Hier noch ein Ergebnis für freie Algebren:

**Lemma 3.4.3.** *Sei $A$ frei von endlichem Rang, und seien $0 \leq i, j$. Dann haben wir in $T^{i+j}A$ folgende Inklusion von $R$-Unteralgebren:*

$$S_{(i,j)}A \subset (S_iA \otimes 1^{\otimes j}) \cdot S_{i+j}A$$

*Beweis.* Da $S_{(i,j)}A = S_iA \otimes S_jA$ ist, genügt es zu zeigen, dass

$$1^{\otimes i} \otimes S_jA \subset (S_iA \otimes 1^{\otimes j}) \cdot S_{i+j}A$$

Wir werden zeigen, dass für jede freie $R$-Algebra $A$ gilt

$$(*) \qquad 1^{\otimes i} \otimes (x^{\otimes k} * 1^{\otimes j-k}) \in (S_iA \otimes 1^{\otimes j}) \cdot S_{i+j}A \quad \text{für } x \in A \text{ und } 0 \leq k \leq j$$

Da für jede beliebige $R$-Algebra $B$ das Tensorprodukt $A \otimes B$ eine freie $B$-Algebra ist, ist insbesondere

$$1^{\otimes i} \otimes \widehat{x}^{\otimes j} \in (S_i(A \otimes B|B) \otimes 1^{\otimes j}) \cdot S_{i+j}(A \otimes B|B) \quad \text{für alle } \widehat{x} \in A \otimes B$$

Wir werden auch jetzt die beiden $R$-Algebren $S_r(A \otimes B|B)$ und $S_r(A|R) \otimes B$ miteinander identifizieren und sehen

$$1^{\otimes i} \otimes \widehat{x}^{\otimes j} \in (S_i(A \otimes B|B) \otimes 1^{\otimes j}) \cdot S_{i+j}(A \otimes B|B) = (S_iA \otimes 1^{\otimes j} \cdot S_{i+j}A) \otimes B$$

Damit folgt aus Satz 2.5.1 sofort, dass

$$1^{\otimes i} \otimes S_jA \subset (S_iA \otimes 1^{\otimes j}) \cdot S_{i+j}A$$

Sei $x \in A$. Wir zeigen $(*)$, indem wir einen Induktionsbeweis nach $k$ führen.
Induktionsanfang: $k = 0$

$$1^{\otimes i} \otimes 1^{\otimes j} = 1^{\otimes i+j} \in S_{i+j}A \subset (S_iA \otimes 1^{\otimes j}) \cdot S_{i+j}A$$

Induktionsvoraussetzung: Für $n \leq k-1$ ist

$$1^{\otimes i} \otimes (x^{\otimes n} * 1^{\otimes j-n}) \in (S_iA \otimes 1^{\otimes j})S_{i+j}A$$

Induktionsschritt: $(k-1) \longrightarrow k$
Wir können den Tensor $x^{\otimes k} * 1^{\otimes i+j-k} \in S_{i+j}A$ in folgende Summanden aufteilen:

$$(x^{\otimes k} * 1^{\otimes i-k} \otimes 1^{\otimes j}) + \sum_{l=1}^{k-1} (x^{\otimes k-l} * 1^{\otimes i-(k-l)} \otimes x^{\otimes l} * 1^{\otimes j-l}) + (1^{\otimes i} \otimes x^{\otimes k} * 1^{\otimes j-k})$$

Wir gehen die Terme der Reihe nach durch. Der erste Term $(x^{\otimes k} * 1^{\otimes i-k} \otimes 1^{\otimes j})$ ist offensichtlich ein Element aus $(S_iA \otimes 1^{\otimes j}) \cdot S_{i+j}A$.

Auf den mittleren Term können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden.

$$(x^{\otimes k-l} * 1^{\otimes i-(k-l)} \otimes x^{\otimes l} * 1^{\otimes j-l}) = (x^{\otimes k-l} * 1^{\otimes i-(k-l)} \otimes 1^{\otimes j}) \cdot (1^{\otimes i} \otimes x^{\otimes l} * 1^{\otimes j-l})$$

Offensichtlich ist $(x^{\otimes k-l} * 1^{\otimes i-(k-l)} \otimes 1^{\otimes j}) \in S_iA \otimes 1^{\otimes j}$ und nach der Induktionsvoraussetzung ist $(1^{\otimes i} \otimes x^{\otimes l} * 1^{\otimes j-l}) \in (S_iA \otimes 1^{\otimes j})S_{i+j}A$.

Also ist auch

$$\underbrace{x^{\otimes k} * 1^{\otimes i+j-k} - \Big((x^{\otimes k} * 1^{\otimes i-k} \otimes 1^{\otimes j}) + \sum_{l=1}^{k-1} (x^{\otimes l} * 1^{\otimes i-l} \otimes x^{\otimes k-l} * 1^{\otimes j+l-k})\Big)} = (1^{\otimes i} \otimes x^{\otimes k} * 1^{\otimes j-k}) \in (S_iA \otimes 1^{\otimes j})S_{i+j}A$$

□

3.5. **Symmetrische Tensoren über besonderen Ringen.** Sei $A = \Pi^d R$ und $e_1, \ldots, e_d$ die orthogonalen Idempotente mit $\sum_{i=1}^d e_i = 1$.

3.5.1. *Die Algebra* $S_d(\Pi^d R)$. In Abschnitt 2.2 haben wir gezeigt, dass

$$S_r A \simeq \bigoplus_{\left((i_1,\ldots,i_l),\alpha_{(r,l)}\right)\in\mathcal{B}_{r,d}} e^{[\alpha_{(r,l)}]}_{i_1\cdots i_l}\, R$$

Mit Hilfe von Lemma 1.5.2 kann man schnell verifizieren, dass es sich bei den $e^{[\alpha_{(r,l)}]}_{i_1\cdots i_l} \in S_r A$ um orthogonale Idempotente handelt. Aus Bemerkung 1.3.1 folgt dann, dass es durch diese Basis möglich ist, das Einselement wie folgt darzustellen:

$$1_{S_r A} \quad = \Big(\sum_{i=1}^d e_i\Big)^{\otimes r} = \sum_{((i_1,\ldots,i_l),\alpha_{r,l})\in\mathcal{B}_{r,d}} e^{[\alpha_{(r,l)}]}_{i_1\cdots i_l}$$

(Natürlich ist $1_{A^{\otimes r}} = 1_{S_r A}$. Wir führen den Index nur mit, wenn wir die entsprechende Zerlegung des Einselementes kenntlich machen wollen.)

Wir werden diese Schreibweise nun etwas abändern, damit wir später einfacher damit umgehen können. Wir sagen

$$\mathcal{E}_r = \left\{ e^{[\alpha_{(r,l)}]}_{i_1\cdots i_l} \,\middle|\, \left((i_1,\ldots,i_l),\alpha_{(r,l)}\right) \in \mathcal{B}_{r,d} \right\}$$

Die einzelnen Elemente $E \in \mathcal{E}_r$ sind orthogonale Idempotente mit $\sum_{E\in\mathcal{E}_r} E = 1$, und wir sehen

$$S_r A \simeq \bigoplus_{E\in\mathcal{E}_r} E\, S_r A$$

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass für jede Partition $\alpha_{(r,l)} \in \mathcal{P}_{(r,l)}$ die $R$-Algebra $S_r A$ eine Unteralgebra von $S_{\alpha_{(r,l)}} A$ ist. Wir werden uns auch hier mit dem Spezialfall $A = \Pi^d R$ beschäftigen. Allgemein können wir das Einselement der Algebra $S_{\alpha_{(r,l)}} A$ wie folgt angeben:

$$1_{S_{\alpha_{(r,l)}} A} = 1_{S_{\alpha_1} A} \otimes \ldots \otimes 1_{S_{\alpha_l} A} = \sum_{E_1\in\mathcal{E}_{\alpha_1}} \cdots \sum_{E_l\in\mathcal{E}_{\alpha_l}} E_1 \otimes \ldots \otimes E_l$$

Dabei sind die $E_1 \otimes \ldots \otimes E_l$ nach Bemerkung 1.5.2 orthogonale Idempotente in $S_{\alpha_{(r,l)}} A$.

**Bemerkung 3.5.1.**

$$\begin{aligned} S_{\alpha_{(r,l)}} A \quad &= \bigoplus_{E_1\in\mathcal{E}_{\alpha_1}} \cdots \bigoplus_{E_l\in\mathcal{E}_{\alpha_l}} E_1 \otimes \ldots \otimes E_l \cdot S_{\alpha_{(r,l)}} A \\ &= \bigoplus_{E_1\in\mathcal{E}_{\alpha_1}} \cdots \bigoplus_{E_l\in\mathcal{E}_{\alpha_l}} E_1 \otimes \ldots \otimes E_l \cdot R \end{aligned}$$

Sei nun $r = d$, und seien

$$E_1 = e^{[\gamma_{(\alpha_1,k_1)}]}_{i_{11}\ldots i_{1k_1}} \in S_{\alpha_1} A, \; \ldots \; , E_l = e^{[\gamma_{(\alpha_l,k_l)}]}_{i_{l1}\ldots i_{lk_l}} \in S_{\alpha_l} A$$

Wir definieren

$$\mathbb{E} := e^{[\gamma_{11},\ldots,\gamma_{1k_1},\ldots,\gamma_{lk_l}]}_{i_{11}\ldots i_{ik_1}\ldots i_{lk_l}} \in S_n A$$

als den elementarsymmetrische Tensor, der von den (im Allgemeinen nicht paarweise verschiedenen) idempotenten Elementen $e_{i_{11}}, \ldots, e_{i_{ik_1}}, \ldots, e_{i_{l1}}, \ldots, e_{i_{lk_l}} \in A$ erzeugt wird. (Die einzelnen $e_i$ treten dabei selbstverständlich in der vorgegebenen Anzahl auf.)

**Bemerkung 3.5.2.** Sei $e_{i_1\cdots i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]} \in S_d A$. Aus Bemerkung 1.5.2 folgt sofort, dass

$$E_1 \otimes \ldots \otimes E_l \cdot e_{i_1\cdots i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]} = \begin{cases} E_1 \otimes \ldots \otimes E_l & \text{falls } e_{i_1\cdots i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]} = \mathbb{E} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere ist $\quad E_1 \otimes \ldots \otimes E_l \cdot \mathbb{E} = E_1 \otimes \ldots \otimes E_l \in A^{\otimes r}$.

Offensichtlich ist

$$E_1 \otimes \ldots \otimes E_l \, S_{\alpha_{(r,l)}} A = E_1 \otimes \ldots \otimes E_l \, R = E_1 \otimes \ldots \otimes E_l \, S_d A$$

3.5.2. *Symmetrische Tensoren über einem Modul über* $\Pi^d R$. Sei in diesem Abschnitt $V$ ein freier $A$-Modul mit Basis $b_1, \ldots, b_n$, dann ist $V$ auch ein $R$-Modul mit $R$-Basis

$$e_j b_i \quad 1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq d$$

Da $A = \bigoplus_{i=1}^d e_i R$, ist $V = \bigoplus_{i=1}^d e_i V$ als $R$-Modul.

Um $S_r(V|R)$ besser verstehen zu können, überlegen wir zunächst

$$T_R^r V \quad = \bigoplus_{\substack{1 \leq i_1 \ldots i_r \leq n \\ 1 \leq j_1 \ldots j_r \leq d}} (b_{i_1} e_{j_1} \otimes \ldots \otimes b_{i_r} e_{j_r}) R$$

Aus der Zerlegung des Einselements in $S_d(A|R)$ folgt eine Zerlegung von $S_d(V|R)$ in eine direkte Summe

$$S_r(V|R) = \bigoplus_{\left((i_1,\ldots,i_l),\alpha_{(r,l)}\right) \in \mathcal{B}_{(r,l)}} e_{i_1\ldots i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]} S_r(V|R)$$

**Bemerkung 3.5.3.** Da $e_{i_1\ldots i_r}^{[1,\ldots,1]} \in S_r A$ ein idempotentes Element ist, gilt

$$v \in e_{i_1\ldots i_r}^{[1,\ldots,1]} S_r(V|R) \quad \text{genau dann, wenn} \quad v \in S_r(V|R) \quad \text{mit } e_{i_1\ldots i_r}^{[1,\ldots,1]} v = v$$

**Lemma 3.5.4.** *Sei* $e_{i_1} \ldots e_{i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]} \in S_r A$ *ein elementarsymmetrischer Tensor, dann gilt*

$$e_{i_1} \ldots e_{i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]} S_r V \simeq S_{\alpha_1}(e_{i_1} V) \otimes \ldots \otimes S_{\alpha_l}(e_{i_l} V)$$

*Beweis.* Aus Korollar 2.4.10 wissen wir, dass

$$S_r\left(\bigoplus_{i=1}^n e_i V\right) \simeq \bigoplus_{l=1}^r \bigoplus_{\substack{\gamma_{(r,l)} \in \mathcal{P}_{(r,l)} \\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n}} S_{\gamma_1} e_{i_1} V \otimes \ldots \otimes S_{\gamma_n} e_{i_l} V$$

Wir haben ausgerechnet, dass

$$S_{\gamma_1} e_{i_1} V \otimes \ldots \otimes S_{\gamma_n} e_{i_l} V \simeq \bigoplus_{\kappa \in K_{\gamma(r,l)}} \kappa \bullet \Big( (e_{i_1} V)^{\otimes \gamma_1} \otimes \ldots \otimes (e_{i_l} V)^{\otimes \gamma_l} \Big)$$

Nun sehen wir, dass der einzige Untermodul, der durch die Multiplikation mit $e_{i_1} \ldots e_{i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]}$ nicht annulliert wird, der Modul $S_{\alpha_1}(e_{i_1} V) \otimes \ldots \otimes S_{\alpha_l}(e_{i_l} V)$ ist (vgl. Bemerkung 1.5.2). □

Sei $W$ ein weiterer $A$-Modul mit Basis $c_1, \ldots, c_m$ und $\beta\colon V \times W \longrightarrow M$ eine $A$-bilineare Abbildung in ein $A$-Modul $M$. Wir haben schon gesehen, wie wir $\beta$ zu einer bilinearen Abbildung

$$S_r\beta\colon S_r V \times S_r W \longrightarrow S_r M$$

fortsetzen können.

Wir möchten nun, wie bereits in Abschnitt 3.2 angekündigt, $S_r\beta$ auf zwei sehr speziellen Elementen ausrechnen.

**Beispiel 3.5.5.** Seien

$$e_1 b_{i_1} \dots e_r b_{i_r}^{[1,\dots,1]}, e_1 c_{j_1} \dots e_r c_{j_r}^{[1,\dots,1]} \in S_r V$$

mit $1 \le i_1, \dots, i_r \le n, 1 \le j_1, \dots, j_r \le m$.

$$\begin{aligned}
& S_r(\beta)\big(e_1 b_{i_1} \dots e_r b_{i_r}^{[1,\dots,1]}, e_1 c_{j_1} \dots e_r c_{j_r}^{[1,\dots,1]}\big) \\
= \;& \beta^{\otimes r}\big(e_1 b_{i_1} \dots e_r b_{i_r}^{[1,\dots,1]}, e_1 c_{j_1} \dots e_r c_{j_r}^{[1,\dots,1]}\big) \\
= \;& \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_r} \beta^{\otimes r}\big(\sigma \bullet (e_1 b_{i_1} \otimes \dots \otimes e_r b_{i_r}), \sigma' \bullet (e_1 c_{j_1} \otimes \dots \otimes e_r c_{j_r})\big) \\
= \;& \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_r} e_{\sigma^{-1}1} e_{\sigma'^{-1}1} \beta(b_{\sigma^{-1}i_1}, c_{\sigma'^{-1}j_1}) \otimes \dots \otimes e_{\sigma^{-1}r} e_{\sigma'^{-1}r} \beta(b_{\sigma^{-1}i_r}, c_{\sigma'^{-1}j_r}) \\
= \;& \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} e_{\sigma^{-1}1} \beta(b_{\sigma^{-1}i_1}, c_{\sigma^{-1}j_1}) \otimes \dots \otimes e_{\sigma^{-1}r} \beta(b_{\sigma^{-1}i_r}, c_{\sigma^{-1}j_r}) \\
= \;& \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \sigma \bullet e_1 \beta(b_{i_1}, c_{j_1}) \otimes \dots \otimes e_r \beta(b_{i_r}, c_{j_r}) \\
= \;& e_1 \beta(b_{i_1}, c_{j_1}) \dots e_r \beta(b_{i_r}, c_{j_r})^{[1,\dots,1]}
\end{aligned}$$

## 4. Die Norm von Moduln und symmetrischen Bilinearformen

Seien $V$ und $W$ freie $R$-Moduln von endlichem Rang, und sei $A$ eine freie $R$-Algebra von endlichem Rang. Wir werden von nun an die beiden $R$-Moduln

$$S_r(V \otimes A) \quad \text{und} \quad S_r V \otimes A$$

über die in Korollar 2.3.2 gezeigte kanonische Isomorphie miteinander identifizieren. Das hat unter anderem zur Folge, dass wir in Zukunft auch zwei Abbildungen als gleich ansehen, wenn sie sich nur um diese kanonische Isomorphie unterscheiden.

4.1. **Ein Algebra-Homomorphismus für symmetrische Tensoren.** Ziel dieses Abschnittes ist es, einen Homomorphismus anzugeben, mit dessen Hilfe wir später die Norm eines Vektorraumes beschreiben können.

Wir werden uns in diesem Abschnitt verstärkt mit $\mathrm{End}(V)$ beschäftigen und werden deshalb einige abkürzende Notationen einführen. Für einen elementarsymmetrischen Tensor $f_1 \dots f_l^{[\alpha_{(r,l)}]} \in S_r(\mathrm{End}(V))$ und $v_1 \otimes \dots \otimes v_r \in V^{\otimes r}$ schreiben wir

$$f_1 \dots f_l^{[\alpha_{(r,l)}]}(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) := \sum_{\kappa \in K_{\alpha_{(r,l)}}} \left(\kappa \bullet f_1^{\otimes \alpha_1} \otimes \dots \otimes f_l^{\otimes \alpha_l}\right)(v_1 \otimes \dots \otimes v_r)$$

Für zwei zerlegbare Tensoren $f_1 \otimes \dots \otimes f_r \in \mathrm{End}(V)^{\otimes r}$ und $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \in \Lambda^r V$ schreiben wir

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_r(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = f_1(v_1) \wedge \cdots \wedge f_r(v_r)$$

bzw.

$$f_1 \dots f_l^{[\alpha_{(r,l)}]}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) := \sum_{\kappa \in K_{\alpha_{(r,l)}}} \left(\kappa \bullet f_1^{\otimes \alpha_1} \otimes \dots \otimes f_l^{\otimes \alpha_l}\right)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)$$

Wir kommen nun zu der vorhin angekündigten Abbildung.

**Lemma 4.1.1.** *Folgende Abbildungsvorschrift für elementarsymmetrische Tensoren $f^{[\alpha_{(r,l)}]} \in S_r(\mathrm{End}_R(V))$ definiert einen Algebra-Homomorphismus:*

$$\begin{array}{rccl} \varrho_r \colon & S_r(\mathrm{End}_R(V)) & \longrightarrow & \mathrm{End}_R(\Lambda^r_R(V)) \\ & f_1 \dots f_l^{[\alpha_{(r,l)}]} & \mapsto & \Big((v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) \mapsto f_1 \dots f_l^{[\alpha_{(r,l)}]}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)\Big) \end{array}$$

*Beweis.* Für $r = 0, 1$ ist dies offensichtlich.

Sei $r \geq 2$. Die linearen Abbildungen $\Phi$ (siehe Beispiel 3.1.2), $\iota_S$ und $\pi_\Lambda$ führen uns zu folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{End}(V)^{\otimes r} \otimes V^{\otimes r} \arrow[r, "\Phi"] & V^{\otimes r} \arrow[d, "\pi_\Lambda"] \\ S_r(\mathrm{End}(V)) \otimes V^{\otimes r} \arrow[u, "\iota_S \otimes id_{V^{\otimes r}}"] \arrow[r] & \Lambda^r V \end{tikzcd}$$

Wir setzen $\widehat{\varrho}_r := \pi_\Lambda \circ \Phi \circ (\iota_S \otimes id_{V^{\otimes r}})$ und überprüfen nun, ob $\widehat{\varrho}_r$ wie gewünscht faktorisiert:

$$\begin{tikzcd} S_r(\mathrm{End}(V)) \otimes V^{\otimes r} \arrow[r, "\widehat{\varrho}_r"] \arrow[d, "id_{S_r(\mathrm{End}(V))} \otimes \pi_\Lambda"'] & \Lambda^r V \arrow[d, equal] \\ S_r(\mathrm{End}(V)) \otimes \Lambda^r V \arrow[r] & \Lambda^r V \end{tikzcd}$$

Sei $f_1 \dots f_l^{[\alpha_{(r,l)}]} =: f^{[\alpha_{(r)}]} \in S_r(\mathrm{End}(V))$ ein elementarsymmetrischer Tensor und $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$ ein Erzeuger von $I_\Lambda$ mit $v_i = v_j$ für ein Paar $(i, j)$ mit $i \neq j$. Wir betrachten die Komposition $\tau := \tau_{1i} \circ \tau_{2j}$. Es ist klar, dass $\tau \bullet f^{[\alpha_{(r)}]} = f^{[\alpha_{(r)}]}$. Mit $\tau^2 = id$ erhalten wir nach Bemerkung 3.1.3

$$\begin{aligned} f^{[\alpha_{(r)}]}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) &= (\tau \bullet f^{[\alpha_{(r)}]})(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) \\ &= \Phi(\tau \bullet f^{[\alpha_{(r)}]} \otimes \tau \bullet (v_1 \otimes \ldots \otimes v_r)) \\ &= f^{[\alpha_{(r)}]}(v_{\tau 1} \otimes \ldots \otimes v_{\tau r}) \end{aligned}$$

Also können wir uns auf den Fall $(v \otimes v \otimes v_3 \otimes \ldots \otimes v_r) \in V^{\otimes r}$ beschränken.

Nach Bemerkung 2.2.2 ist $f \otimes f$ ein Erzeuger von $S_2 V$. Also erzeugen die Tensoren

$$f \otimes f \otimes g_3 \otimes \ldots \otimes g_r \quad \text{mit } f \in \mathrm{End}(V) \text{ und } g_3 \otimes \ldots \otimes g_r \in \mathrm{End}(V)^{\otimes r-2}$$

den Untermodul $S_2 V \otimes \mathrm{End}(V)^{\otimes r-2} \subset \mathrm{End}(V)^{\otimes r}$. Es ist

$$f(v) \otimes f(v) \otimes g_3(v_3) \otimes \ldots \otimes g_r(v_r) \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ I_\Lambda$$

Wir benutzen die Inklusion $S_2(\mathrm{End}\, V) \otimes \mathrm{End}(V)^{\otimes r-2} \supset S_r(\mathrm{End}\, V)$ aus Beispiel 2.1.2 und sehen, dass das Gleiche auch für beliebiges $f^{[\alpha_{(r)}]} \in S_r(\mathrm{End}(V))$ gelten muss.

Folglich wird jedes Element aus $I_\Lambda$ durch ein Element $f^{[\alpha_{(r)}]} \in S_r(\mathrm{End}\, V)$ auf ein Element aus $I_\Lambda$ abgebildet, und die Abbildung

$$\varrho_r \colon S_r(\mathrm{End}(V)) \longrightarrow \mathrm{End}(\Lambda^r V)$$

ist wohldefiniert. □

**Korollar 4.1.2.**

(1) *Wir haben einen Algebra-Homomorphismus*

$$\begin{aligned} \widetilde{\varrho}_r \colon S_r A &\longrightarrow \mathrm{End}_R(\Lambda^r A) \\ \textit{mit} \quad a^{\otimes r} &\longmapsto \Big((v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) \mapsto a^r (v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)\Big) \quad \textit{für } a \in R \end{aligned}$$

(2) *Sei $V$ frei vom Rang $n$, dann induziert $\varrho_n$ einen Algebra-Homomorphismus*

$$\nu \colon S_n(\mathrm{End}(V)) \longrightarrow R \quad \textit{mit} \quad f^{\otimes n} \longmapsto det(f) \quad \textit{für } f \in \mathrm{End}(V)$$

*Beweis.* Die Existenz folgt in beiden Fällen recht schnell aus Lemma 4.1.1.

(1) Mit Hilfe des Algebra-Homomorphismus $\lambda_\bullet$ aus Bemerkung 1.5.7 können wir $\widetilde{\varrho}_r$ wie folgt angeben:

$$\widetilde{\varrho}_r = \varrho_r \circ S_r \lambda_\bullet$$

mit

$$S_r(\lambda_\bullet) \colon S_n(A) \longrightarrow S_n(\mathrm{End}(A)) \quad \text{vermöge } a_{i_1} \ldots a_{i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]} \mapsto \lambda_{a_{i_1}} \ldots \lambda_{a_{i_l}}^{[\alpha_{(r,l)}]}$$

(2) Benutzen wir die Isomorphie $\delta \colon \mathrm{End}(\Lambda^n V) \longrightarrow R$ aus Abschnitt 1.5.4, dann ist $\nu = \varrho_n \circ \delta$. Offensichtlich ist $\nu(f^{\otimes n}) = \det(f)$. □

Alle drei Homomorphismen, die wir in diesem Abschnitt eingeführt haben, unterliegen natürlich der Eindeutigkeitsaussage, die wir in Satz 2.5.2 (bzw. dem anschließenden Korollar) formuliert haben.

4.2. **Die Norm eines Moduls.** Sei $R$ ein Ring und $A$ eine $R$-Algebra. Mit

$$N_R^A \colon A \longrightarrow R \qquad \text{vermöge } N_R^A(x) = \det(\lambda_x) \qquad \text{für } x \in A$$

bezeichnen wir die Algebren-Norm von $A$ über $R$. Wenn aus dem Kontext eindeutig hervorgeht, um welche Ringe es sich handelt, werden wir auch $N$ statt $N_R^A$ schreiben.

Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes werden wir $A$ als frei vom Rang $n$ voraussetzen.

**Lemma 4.2.1.** *Wir haben einen $R$-Algebra-Homomorphismus*

$$\nu_R^A \colon S_n A \longrightarrow R \quad \textit{mit} \quad \nu_R^A(a^{\otimes n}) = N_R^A(a) \textit{ für alle } a \in A$$

*Beweis.* Die Existenz folgt - ähnlich wie Korollar 4.1.2 - aus dem folgenden Diagramm:

$$\begin{tikzcd} S_n A \arrow[r, "\nu_R^A"] \arrow[d, "S_n(\lambda_\bullet)"'] & R \\ S_n(\mathrm{End}(A)) \arrow[r, "\varrho_n"] & \mathrm{End}(\Lambda^n A) \arrow[u, "\delta", "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

wobei $\delta\colon \mathrm{End}(\Lambda^n A) \longrightarrow R$ die Isomorphie aus Abschnitt 1.5.4 ist.

Es gilt: $\nu_R^A(a^{\otimes r}) = \nu(\lambda_a^{\otimes r}) = \det(\lambda_a) = N_R^A(a)$ □

**Lemma 4.2.2.** *Ist $B$ eine weitere $R$-Algebra, dann kommutiert das folgende Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} \nu_B^{A\otimes B}\colon S_n(A\otimes_R B|B) & \longrightarrow & B \\ \| & & \| \\ (\nu_R^A)_B\colon S_n(A|R)\otimes_R B & \longrightarrow & B \end{array}$$

*Insbesondere ist*

$$\nu_B^{A\otimes B} = (\nu_R^A)_B$$

*Beweis.* Sei $a_1 \dots a_l^{[\alpha_{(n,l)}]} \in S_n A$ ein elementarsymmetrischer Tensor, dann ist

$$S_n(A|R)\otimes B \ni a_1 \dots a_l^{[\alpha_{(n,l)}]} \otimes 1 = a_1\otimes 1 \dots a_l \otimes 1^{[\alpha_{(n,l)}]} \in S_n(A\otimes B|B)$$

Aufgrund der universellen Eigenschaft von $(\nu_R^A)_B$ genügt es, sich davon zu überzeugen, dass

$$\nu_R^A(a_1\dots a_l^{[\alpha_{(n,l)}]}) = \nu_B^{A\otimes B}(a_1\otimes 1\dots a_l\otimes 1^{[\alpha_{(n,l)}]})$$

Das lässt sich leicht nachrechnen. □

Wir können nun folgenden zentralen Satz formulieren:

**Satz 4.2.3.** *Sei $A$ eine freie $R$-Algebra von Rang $n$. Dann haben wir einen eindeutigen $R$-Algebra-Homomorphismus*

$$\nu_R^A\colon S_n A \longrightarrow R$$

*mit*

$$(\nu_R^A)_B(\widehat{a}^{\otimes n}) = N_B^{A\otimes B}(\widehat{a}) \qquad \text{für jede } R\text{-Algebra } B \text{ und } \widehat{a}\in A\otimes B.$$

*Beweis.* Die Existenz haben wir durch Lemma 4.2.1 und Lemma 4.2.2 geklärt.

Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma 4.2.2, denn nach Satz 2.5.2 ist $\nu_R^A$ die einzige Abbildung mit

$$(\nu_R^A)_B(\widehat{a}^{\otimes n}) = \nu_B^{A\otimes B}(\widehat{a}^{\otimes n}) = N_B^{A\otimes B}(\widehat{a}) \qquad \text{für jede } R\text{-Algebra } B \text{ und } \widehat{a}\in A\otimes B$$

□

Sei $V$ ein freier $A$-Modul von endlichem Rang. Wir werden $V$ als $R$-Modul ansehen und wollen uns nun mit der $S_nA$-Modulstruktur von $S_nV$ auseinandersetzen. Den $R$-Modul

$$\mathcal{N}_R^A(V) = S_n(V|R)\otimes_{S_n(A|R)} R$$

werden wir die *Norm des Moduls $V$* nennen. Dabei sehen wir $R$ via $\nu_R^A$ als $S_nA$-Modul an. Wenn aus dem Kontext eindeutig hervorgeht, um welche Ringe es sich handelt, werden wir auch $\mathcal{N}(V)$ statt $\mathcal{N}_R^A(V)$ schreiben. Wie wir leicht sehen, können wir den $A$-Modul $V$ in den $R$-Modul $\mathcal{N}(V)$ abbilden durch

$$\iota_{\mathcal{N}}\colon V \longrightarrow \mathcal{N}_R^A(V) \quad \text{vermöge } v \mapsto v^{\otimes d}\otimes 1$$

Es ist offensichtlich $\mathcal{N}_R^A(A) \simeq R$. Ist $a^{\otimes n} \in S_nA$ und $v_1 \dots v_l^{[\alpha_{(n,l)}]} \in S_nV$ ein elementarsymmetrischer Tensor, so gilt

$$av_1 \dots av_l^{[\alpha_{(n,l)}]} \otimes 1 = (a^{\otimes n} \cdot v_1 \dots v_l^{[\alpha_{(n,l)}]}) \otimes 1 = v_1 \dots v_l^{[\alpha_{(n,l)}]} \otimes N(a)$$

Funktoriell gesehen ist die Norm $\mathcal{N}_R^A$ als Komposition der beiden Funktoren

$$(- \otimes_{S_nA} R) \circ (S_n-)$$

ein Funktor von der Kategorie der $A$-Moduln in die Kategorie der $R$-Moduln.

Wie man schnell sieht, respektiert die Norm einen Grundringwechsel.

**Bemerkung 4.2.4.** Sei $B$ eine $R$-Algebra. Wir haben folgende kanonische $B$-Isomorphie:

$$\begin{array}{rcl} \big(S_n(V|R) \otimes_{S_n(A|R)} R\big) \otimes_R B & \longrightarrow & (S_n(V|R) \otimes_R B) \otimes_{(S_n(A|R)\otimes_R B)} (R \otimes_R B) \\ \text{vermöge } (v_1 \dots v_l^{[\alpha_{(n,l)}]} \otimes a) \otimes b & \longmapsto & (v_1 \dots v_l^{[\alpha_{(n,l)}]} \otimes 1) \otimes (a \otimes b) \end{array}$$

für $a \in R$, $b \in B$ und elementarsymmetrische Tensoren $v_1 \dots v_l^{[\alpha_{(n,l)}]} \in S_n(V|R)$.

Damit können wir folgenden Satz beweisen:

**Satz 4.2.5.** *Sei $A$ eine freie $R$-Algebra vom Rang $n$, $B$ eine beliebige $R$-Algebra und $V$ ein freier $A$-Modul von endlichem Rang. Dann haben wir eine kanonische $B$-Isomorphie*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N}_B^{A\otimes B}(V \otimes B) & \simeq & \mathcal{N}_R^A(V) \otimes_R B \\ \textit{vermöge} \quad \big((v_1 \otimes b_1) \dots (v_l \otimes b_l)^{[\alpha_{(r,l)}]} \otimes 1\big) & \mapsto & \big(v_1 \dots v_l^{[\alpha_{(r,l)}]} \otimes 1\big) \otimes b_1^{\alpha_1} \cdots b_l^{\alpha_l} \end{array}$$

*für elementarsymmetrische Tensoren $(v_1 \otimes b_1) \dots (v_l \otimes b_l)^{[\alpha_{(r,l)}]} \otimes 1 \in \mathcal{N}_B^{A\otimes B}(V \otimes B)$.*

*Beweis.* Aus der letzten Bemerkung 4.2.4 folgt:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N}_B^{A\otimes B}(V \otimes_R B) & = & S_n(V \otimes_R B|B) \otimes_{S_n(A\otimes_R B|B)} B \\ & = & (S_n(V|R) \otimes_R B) \otimes_{(S_n(A|R)\otimes_R B)} (R \otimes_R B) \\ & \simeq & \big(S_n(V|R) \otimes_{S_n(A|R)} R\big) \otimes_R B \\ & = & \mathcal{N}_R^A(V) \otimes_R B \end{array}$$

Wie man sieht, wird ein elementarsymmetrischer Tensor wie gewünscht abgebildet. □

Wir werden in Zukunft die beiden $R$-Moduln aus dem letzten Satz miteinander identifizieren und können nun eine wichtige Aussage für die Norm einer $A$-linearen Abbildung formulieren.

**Satz 4.2.6.** *Sei $A$ eine freie $R$-Algebra vom Rang $n$, $W$ ein beliebiger $A$-Modul und $V$ ein freier $A$-Modul von endlichem Rang. Zu jeder $A$-linearen Abbildung*

$$f \colon V \longrightarrow W$$

*gibt es genau eine $R$-lineare Abbildung*

$$\mathcal{N}_R^A f \colon \mathcal{N}_R^A(V) \longrightarrow \mathcal{N}_R^A(W)$$

*mit*

$$(\mathcal{N}_R^A f)_B\big(\widehat{v}^{\otimes n} \otimes 1\big) = f_B(\widehat{v})^{\otimes n} \otimes 1 \quad \in \mathcal{N}_B^{A\otimes B}(W \otimes B)$$

*für jede $R$-Algebra $B$ und $\widehat{v} \in V \otimes B$.*

*Insbesondere ist*

$$(\mathcal{N}_R^A f)_B = \mathcal{N}_B^{A\otimes B} f_B$$

*Ist $f$ ein Isomorphismus, dann ist es auch $\mathcal{N}(f)$.*

*Beweis.* Wir setzen

$$\mathcal{N}_R^A f := S_n(f|R)_R \quad \text{via } \nu_R^A\colon S_n A \longrightarrow R$$

Die Eindeutigkeitsaussage ist eine Umformulierung der Eindeutigkeitsaussage über $S_n f$ aus Satz 2.5.4 mittels der universellen Eigenschaft des Grundringwechsels.

Die Aussage über die Isomorphie folgt ebenfalls mittels der universellen Eigenschaft des Grundringwechsels aus Satz 2.5.4. □

**Korollar 4.2.7.** *Insbesondere gibt es zu jeder $A$-Linearform $f\colon V \longrightarrow A$ genau eine $R$-Linearform*

$$\mathcal{N}_R^A f\colon \mathcal{N}_R^A(V) \longrightarrow R$$

*mit*

$$(\mathcal{N}_R^A f)_B\big(\widehat{v}^{\otimes n} \otimes 1\big) = N_B^{A\otimes B}(f_B(\widehat{v})) \qquad \textit{für jede } R\textit{-Algebra } B \textit{ und } \widehat{v} \in V \otimes B$$

*denn, wie wir bereits wissen, ist $\mathcal{N}_B^{A\otimes B}(A \otimes B) \simeq B$.*

4.3. **Die Norm spezieller Moduln.** Sei $A = \Pi^d R$, und seien $e_1, \dots, e_d$ die orthogonalen Idempotente $e_1, \dots, e_d$ mit $\sum_{i=1}^d e_i = 1$. Weiter sei $V$ ein freier $A$-Modul vom Rang $n$.

4.3.1. *Die Norm der Algebra $\Pi^d R$.* Wir werden uns nun überlegen, wie der Kern von $\nu_R^A$ aussieht. Dazu schauen wir uns die Komposition der beiden Abbildungen

$$\widetilde{\varrho}_r\colon S_r A \longrightarrow \operatorname{End}(\Lambda^r A) \quad \text{und} \quad \delta\colon \operatorname{End}(\Lambda^r A) \longrightarrow R$$

etwas genauer an. Wie wir wissen, ist $\nu_R^A = \delta \circ \widetilde{\varrho}_d$.

**Lemma 4.3.1.** *Sei $\alpha_{(r,l)} \in \mathcal{P}_{(r,l)}$ eine Partition von $r$. Dann ist*

$$\delta \circ \widetilde{\varrho}_r\big(e_{i_1,\dots,i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]}\big) \neq 0 \quad \textit{genau dann, wenn} \quad r = d \textit{ und } \alpha_{(d,l)} = (1, \dots, 1)$$

*Insbesondere ist $\nu_R^A(e_{1\dots d}^{[1,\dots,1]}) = 1$.*

*Beweis.* Sei $\alpha_{(r,l)} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$. Dann sind nach Bemerkung 1.5.2 die einzigen Tensoren in $V^{\otimes r}$, die nicht von $\widetilde{\varrho}_r\big(e_{i_1,\dots,i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]}\big)$ annulliert werden, von der Form

$$\kappa \bullet (e_{i_1}^{\otimes \alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{i_l}^{\otimes \alpha_l}) \quad \text{mit } \kappa \in K_{\alpha(r,l)}$$

Sei ohne Einschränkung $i_1 < \dots < i_l$. Dann ist der einzige Tensor in $\Lambda^r A$, der nicht von $\widetilde{\varrho}_r\big(e_{i_1,\dots,i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]}\big)$ annulliert wird, der Tensor

$$\pi_\Lambda(e_{i_1}^{\otimes \alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{i_l}^{\otimes \alpha_l}) = e_{i_1}^{\wedge \alpha_1} \wedge \dots \wedge e_{i_l}^{\wedge \alpha_l}$$

Dieser ist genau dann gleich Null in $\Lambda^r A$, wenn $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \neq (1, \dots, 1)$.

Ist $d < r$, so wissen wir, dass $\Lambda^r A = 0$ ist.

Für $d > r$ gibt es zu jedem Tensor $e_{i_1\dots i_r}^{[1,\dots,1]} \in S_r A$ ein Basiselement $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r} \in \Lambda^r A$, so dass

$$e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r} \xrightarrow{\widetilde{\varrho}_r(e_{i_1\dots i_r}^{[1,\dots,1]})} 0$$

Insbesondere ist der Endomorphismus $\widetilde{\varrho}_r(e_{i_1\dots i_r}^{[1,\dots,1]})$ kein Isomorphismus, und die Determinante, die man für das Ergebnis unter der Isomorphie $\delta$ berechnen muss, ist Null.

Ist $d = r$, dann bildet $\widetilde{\varrho}_d(e_{1\dots d}^{[1,\dots,1]})$ den einzigen Basisvektor

$$e_1 \wedge \dots \wedge e_d$$

auf sich ab. Es ist die Identität auf $\Lambda^d A$, damit ist $\widetilde{\varrho}_d(e_{1\dots d}^{[1,\dots,1]})$ ein Isomorphismus, und wir haben unter $\delta$ das Ergebnis $\delta \circ \widetilde{\varrho}_d(e_{1\dots d}^{[1,\dots,1]}) = 1$. □

In dieser Situation ist

$$S_d A = \bigoplus_{l=1}^{d} \bigoplus_{\substack{\alpha_{(d,l)} \in \mathcal{P}_{(d,l)} \\ 1 \le i_1 < \dots < i_l \le d}} e_{i_1 \dots i_l}^{[\alpha_{(r,l)}]} R$$

und damit

$$\mathcal{N}(A) = S_d A \otimes_{S_d A} R = e_{1 \cdots d}^{[1,\dots,1]} R \simeq R$$

Dadurch sehen wir, dass $\mathrm{Bild}(\nu_R^A) \subseteq R$ alleine durch die Unteralgebra $e_{1 \cdots d}^{[1,\dots,1]} R$ in $S_d A$ bestimmt wird. Insbesondere haben wir für das Einselement in $\mathcal{N}(A)$

$$1_{\mathcal{N}(A)} = 1_{S_d A} \otimes 1 = e_{1 \cdots d}^{[1,\dots,1]} \otimes 1$$

4.3.2. *Die Norm eines freien Moduls über $\Pi^d R$.* Wir werden uns in diesem Unterabschnitt mit einem Satz beschäftigen, der im weiteren Verlauf eine zentrale Rolle einnehmen wird.

**Satz 4.3.2.** *Sei $A = \Pi^d R$, und seien $e_1, \dots, e_d$ die orthogonalen Idempotente mit $\sum_{i=1}^d e_i = 1$. Weiter sei $V$ ein freier $A$-Modul vom Rang $n$. Dann haben wir folgenden $R$-Isomorphismus*

$$\mathcal{N}_R^A(V) \longrightarrow e_1 V \otimes_R \dots \otimes_R e_d V \qquad \textit{mit } v^{\otimes d} \otimes 1 \mapsto e_1 v \otimes \dots \otimes e_d v \qquad \textit{für } v \in V$$

*Insbesondere ist $\mathcal{N}_R^A(V)$ ein $R$-Modul vom Rang $d^n$.*

Der Beweis bedarf einiger Vorbereitung, doch einen großen Teil davon haben wir schon in Abschnitt 3.5.2 geleistet. Wir überlegen uns jetzt, wie die (Unter-)Moduln $e_{i_1 \cdots i_l}^{[\alpha_{d,l}]} \cdot S_d V \subset e_{i_1 \cdots i_l}^{[\alpha_{d,l}]} \cdot V^{\otimes d}$ aussehen.

**Lemma 4.3.3.** *Sei $1 \le i_1 \dots i_l \le d$.*

(1) $$e_{1 \cdots d}^{[1,\dots,1]} S_d(V|R) \otimes_{S_d(A|R)} R \quad \simeq \quad e_1 V \otimes_R \dots \otimes_R e_d V$$

$$\textit{vermöge} \qquad e_1 b_{i_1} \dots e_d b_{i_d}^{[1,\dots,1]} \otimes 1 \quad \longleftrightarrow \quad e_1 b_{i_1} \otimes \dots \otimes e_d b_{i_d}$$

*für* $e_1 b_{i_1} \dots e_d b_{i_d}^{[1,\dots,1]} \in e_{1 \cdots d}^{[1,\dots,1]} S_d(V|R)$

(2) $$e_{i_1 \cdots i_l}^{[\alpha_{(d,l)}]} S_d(V|R) \otimes_{S_d(A|R)} R \quad = \quad 0 \qquad \textit{falls } \alpha_{(d,l)} \neq (1, \dots, 1)$$

*Beweis.* (2) Sei $x \in e_{i_1 \cdots i_l}^{[\alpha_{(d,l)}]} S_d(V|R)$. Dann ist nach Bemerkung 3.5.3

$$e_{i_1 \cdots i_l}^{[\alpha_{(d,l)}]} \cdot x = x$$

Nach Lemma 4.3.1 ist $\nu(e_{i_1 \cdots i_l}^{[\alpha_{(d,l)}]}) = 0$ und damit:

$$e_{i_1 \cdots i_l}^{[\alpha_{(d,l)}]} x \otimes 1 = x \otimes \nu(e_{i_1 \cdots i_l}^{[\alpha_{(d,l)}]}) = 0$$

(1) Dies folgt unmittelbar aus Lemma 3.5.4. Man kann sich die Aussage aber auch wie folgt überlegen:

Wir können jeden Tensor aus $e_{1 \cdots d}^{[1,\dots,1]} S_d(V|R)$ darstellen durch

$$e_{1 \cdots d}^{[1,\dots,1]} x \qquad \text{mit } x \in S_d(V|R)$$

Aus Bemerkung 2.2.1 wissen wir, dass wir jeden symmetrischen Tensor aus $S_d(V|R)$ als Linearkombination der folgenden Tensoren schreiben können:

$$e_{i_1} b_{j_1} \dots e_{i_l} b_{j_l}^{[\alpha_{(d,l)}]} \qquad \text{mit } 1 \le i_1 \dots i_l \le d,\ 1 \le j_1 \dots j_l \le n \text{ und } \alpha_{(d,l)} \in \mathcal{P}_{(d,l)}$$

Der Bemerkung 1.5.2 können wir entnehmen, dass die einzigen Basiselemente von $S_r(V|R)$, die durch die Multiplikation mit $e_{1 \cdots d}^{[1,\dots,1]}$ nicht annulliert werden, von der folgenden Form sind:

$$e_1 b_{j_1} \dots e_d b_{j_d}^{[1,\dots,1]} \in e_{1 \cdots d}^{[1,\dots,1]} S_d(V|R)$$

Für diese Tensoren ist nach Bemerkung 3.5.3

$$\big(e^{[1,\dots,1]}_{1,\dots,d}\big)\big(e_1 b_{j_1}\dots e_d b^{[1,\dots,1]}_{j_d}\big) = e_1 b_{j_1}\dots e_d b^{[1,\dots,1]}_{j_d}$$

und nach Bemerkung 4.3.1 gilt $\nu^A_R(e^{[1,\dots,1]}_{1,\dots,d}) = 1$. Damit kann die $R$-Isomorphie wie folgt angegeben werden:

$$\begin{array}{rcl} e^{[1,\dots,1]}_{1\cdots d} S_d(V|R) \otimes_{S_d(A|R)} R & \simeq & e_1 V \otimes_R \dots \otimes_R e_d V \\ e_1 b_{i_1}\dots e_d b^{[1,\dots,1]}_{i_d} \otimes 1 & \longleftrightarrow & e_1 b_{i_1} \otimes \dots \otimes e_d b_{i_d} \end{array}$$

□

Wie dem Beweis zu Lemma 4.3.3 leicht zu entnehmen ist, können wir zu jedem $\sigma \in \mathcal{S}_r$ eine entsprechende Isomorphie angeben:

$$e^{[1,\dots,1]}_{1\cdots d} S_d(V|R) \otimes_{S_d(A|R)} R \simeq e_{\sigma 1} V \otimes \dots \otimes e_{\sigma d} V$$

Insbesondere bilden die Vektoren

$$e_1 b_{i_1}\dots e_d b^{[1,\dots,1]}_{i_d} \otimes 1 \quad \text{mit } i_1,\dots,i_d \in \{1,\dots,n\}$$

eine $R$-Basis von $\mathcal{N}^A_R(V)$.

Nun folgt der ausstehende Beweis sehr schnell.

*Beweis.* (von Satz 4.3.2)

$$\begin{array}{rcl} S_d V \otimes_{S_d A} R & \overset{\text{Bem.3.5.1}}{=} & \left( \bigoplus\limits_{((i_1,\dots,i_l),\alpha_{(d,l)}) \in \mathcal{B}_{d,l}} e^{[\alpha_{(d,l)}]}_{i_1\dots i_l} S_d V \right) \otimes_{S_d A} R \\ & = & \bigoplus\limits_{((i_1,\dots,i_l),\alpha_{(d,l)}) \in \mathcal{B}_{d,l}} \big(e^{[\alpha_{(d,l)}]}_{i_1\dots i_l} S_d V \otimes_{S_d A} R\big) \\ & \overset{\text{Lemma 4.3.3}}{\simeq} & e_1 V \otimes \dots \otimes e_d V \end{array}$$

Sei $v = \sum_{i=1}^n a_i b_i \in V$. Wir rechnen nun nach, was mit dem Element $v^{\otimes d} \otimes 1 \in \mathcal{N}(V)$ unter diesem Isomorphismus geschieht. Nach Lemma 4.3.3(2) ist

$$v^{\otimes d} \otimes 1 = \Big(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d a_i b_i e_j\Big)^{\otimes d} \otimes 1 = \sum_{1 \le i_1,\dots,i_d \le n} e_1 b_{i_1} a_{i_1} \dots e_d b_{i_d} a^{[1,\dots,1]}_{i_d} \otimes 1$$

und

$$e_1 v \otimes \dots \otimes e_d v = \sum_{i_1=1}^n e_1 b_{i_1} a_{i_1} \otimes \dots \otimes \sum_{i_d=1}^n e_1 b_{i_d} a_{i_d} = \sum_{1 \le i_1,\dots,i_d \le n} e_1 b_{i_1} a_{i_1} \otimes \dots \otimes e_1 b_{i_d} a_{i_d}$$

Wie wir schon gesehen haben, bildet der Isomorphismus aus Lemma 4.3.3(1) diese beiden Elemente aufeinander ab.

$$e_1 b_{i_1} a_{i_1} \dots e_d b_{i_d} a^{[1,\dots,1]}_{i_d} \otimes 1 \longleftrightarrow e_1 b_{i_1} a_{i_1} \otimes \dots \otimes e_1 b_{i_d} a_{i_d}$$

□

**Korollar 4.3.4.** *Sei $W$ ein weiterer freier $A$-Modul von endlichem Rang. Dann ist*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N}^A_R(V \otimes_A W) & \simeq & \mathcal{N}^A_R(V) \otimes_R \mathcal{N}^A_R(W) \\ \textit{mit} \quad (v \otimes w)^{\otimes d} \otimes 1 & \longleftrightarrow & (v^{\otimes d} \otimes 1) \otimes (w^{\otimes d} \otimes 1) \quad \textit{für } v \in V, w \in W \end{array}$$

*Beweis.* Aus dem letzten Lemma folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_R^A(V\otimes_A W) &\simeq e_1(V\otimes_A W)\otimes_R\ldots\otimes_R e_d(V\otimes_A W)\\ &\overset{\text{Bem 1.5.1}}{\simeq} (e_1V\otimes_R e_1W)\otimes_R\ldots\otimes_R(e_dV\otimes_R e_dW)\\ &\simeq (e_1V\otimes_R\ldots\otimes_R e_dV)\otimes_R(e_1W\otimes_R\ldots\otimes_R e_dW)\\ &\simeq \mathcal{N}_R^A(V)\otimes_R\mathcal{N}_R^A(W)\end{aligned}$$

Folgt man den einzelnen Isomorphismen, dann sieht man, dass ein Element $(v\otimes w)^{\otimes d}\otimes 1\in\mathcal{N}_R^A(V\otimes_A W)$ offensichtlich wie erwartet abgebildet wird. □

4.4. **Die Norm im Falle einer separablen Algebra.** Sei $L$ eine separable $K$-Algebra der Dimension $d$, $V$ ein freier $L$-Modul vom Rang $n$ und $F|K$ die Galoiserweiterung, die wir in Unterabschnitt 1.5.3 eingeführt haben. Wir werden in diesem Abschnitt die beiden $F$-Algebren $\Pi^d F$ und $L\otimes_K F$ miteinander identifizieren.

**Bemerkung 4.4.1.** $V\otimes_K F$ ist ein freier $L\otimes_K F$-Modul vom Rang $n$.

*Beweis.* Ist $b_1,\ldots,b_n$ eine $K$-Basis von $L$, dann ist $b_1\otimes 1,\ldots,b_n\otimes 1$ eine $L\otimes_K F$-Basis von $V\otimes_K F$. □

**Satz 4.4.2.** *Sei $L$ eine separable $K$-Algebra der Dimension $d$ und $V$ ein freier $L$-Modul vom Rang $n$. Sei $F|K$ die bereits erwähnte Galoiserweiterung, und seien $e_1,\ldots,e_d\in\Pi^d F$ die orthogonalen Idempotente mit $\sum_{i=1}^d e_i=1$. Dann haben wir eine kanonische $F$-Isomorphie*

$$\begin{array}{rcll}\mathcal{N}_K^L(V)\otimes_K F & \simeq & e_1(V\otimes_K F)\otimes_F\ldots\otimes_F e_d(V\otimes_K F) & \\ \textit{mit}\quad (v^{\otimes d}\otimes 1)\otimes 1 & \longleftrightarrow & e_1(v\otimes 1)\otimes\ldots\otimes e_d(v\otimes 1) & \textit{für } v\in V\end{array}$$

*Insbesondere ist $\mathcal{N}_K^L(V)$ ein $K$-Vektorraum der Dimension $d^n$.*

*Beweis.* Es ist $L\otimes_K F=\Pi^n F$. Nach Bemerkung 4.4.1 ist $V\otimes_K F$ ein freier $L\otimes_K F$-Modul. Wie wir sehen, folgt aus Satz 4.2.5, dass

$$\mathcal{N}_K^L(V)\otimes_K F\simeq\mathcal{N}_F^{L\otimes_K F}(V\otimes_K F)=\mathcal{N}_F^{\Pi^n F}(V\otimes_K F)$$

damit können wir Satz 4.3.2 anwenden, um zu sehen, dass

$$\mathcal{N}_F^{\Pi^n F}(V\otimes_K F)\simeq e_1(V\otimes_K F)\otimes_F\ldots\otimes_F e_d(V\otimes_K F)$$

wobei $e_1,\ldots,e_d\in\Pi^d F$ die orthogonalen Idempotente sind.

Um zu verifizieren, dass das Element $(v^{\otimes d}\otimes 1)\otimes 1\in\mathcal{N}_K^L(V)\otimes_K F$ wie gefordert abgebildet wird, müssen wir nur den Isomorphismen aus Satz 4.2.5 und Satz 4.3.2 folgen.

Kommen wir nun zur Dimension dieses $K$-Vektorraumes. Wir wissen aus Unterabschnitt 1.3.1, dass

$$\dim_K\ \mathcal{N}_K^L(V)=\dim_F\ \big(\mathcal{N}_K^L(V)\otimes_K F\big)=\dim_F\ \big(\mathcal{N}_F^{\Pi^n F}(V\otimes F)\big)$$

Nach Bemerkung 4.4.1 ist $V\otimes_K F$ ein freier $L\otimes_K F$-Modul vom Rang $n$. Damit folgt sofort, dass der $K$-Vektorraum $\mathcal{N}_K^L(V)$ die Dimension $d^n$ hat. □

Sei $\mathcal{G}$ die Galoisgruppe von $F|K$ (vgl. Unterabschnitt 1.5.3). Wir wissen, dass die Invarianten unter der Galoisoperation in $\mathcal{N}_R^L(V)\otimes_K F$ genau die Tensoren der folgenden Form sind:

$$\xi\otimes 1\in\mathcal{N}_K^L(V)\otimes_K F\quad\text{mit }\xi\in\mathcal{N}_K^L(V)$$

**Bemerkung 4.4.3.** Die Isomorphie

$$\mathcal{N}_K^L(V)\otimes_K F\simeq\mathcal{N}_F^{L\otimes_K F}(V\otimes_L F)=S_d(V\otimes_L F|F)\otimes_{S_d(L\otimes_K F|F)}F$$

ist verträglich mit der Galoisoperation, die von $\mathcal{G}$ auf beide Räume induziert wird.

**Satz 4.4.4.** *Sei $L$ eine separable $K$-Algebra der Dimension $d$, und seien $V, W$ freie $L$-Moduln von endlichem Rang. Dann ist*

$$\mathcal{N}_K^L(V \otimes_L W) \quad \simeq \quad \mathcal{N}_K^L(V) \otimes_K \mathcal{N}_K^L(W)$$

*Beweis.* Wir können die Situation durch folgendes Diagramm veranschaulichen:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{N}_K^L(V \otimes_L W) & \longrightarrow & \mathcal{N}_K^L(V) \otimes_K \mathcal{N}_K^L(W) \\
\simeq \big\downarrow & & \simeq \big\downarrow \\
\big(\mathcal{N}_K^L(V \otimes_L W) \otimes_K F\big)^{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\simeq} & \big((\mathcal{N}_K^L(V) \otimes_K \mathcal{N}_K^L(W)) \otimes_K F\big)^{\mathcal{G}} \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathcal{N}_K^L(V \otimes_L W) \otimes_K F & \xrightarrow{\simeq} & (\mathcal{N}_K^L(V) \otimes_K F) \otimes_F (\mathcal{N}_K^L(W) \otimes_K F) \\
\simeq \big\downarrow & & \simeq \big\downarrow \\
\mathcal{N}_F^{L \otimes_K F}(V' \otimes_{(L \otimes_K F)} W') & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{N}_F^{L \otimes_K F}(V') \otimes_F \mathcal{N}_F^{L \otimes_K F}(W') \\
\simeq \big\downarrow & & \simeq \big\downarrow \\
\bigotimes_{i=1}^d e_i\big(V' \otimes_{(L \otimes_K F)} W'\big) & \xrightarrow{\simeq} & \Big(\bigotimes_{i=1}^d e_i V'\Big) \otimes_F \Big(\bigotimes_{i=1}^d e_i W'\Big)
\end{array}$$

Dabei sind $e_1, \ldots, e_d$ die orthogonalen Idempotente aus $\Pi^d F$ mit $\sum_{i=1}^d e_i = 1$ und wir setzen $V' := V \otimes_K F$ bzw. $W' := W \otimes_K F$.

Wir müssen uns nun überlegen, dass alle Isomorphismen die Operation der Galoisgruppe respektieren. Für die Isomorphie

$$\bigotimes_{i=1}^d e_i\big(V' \otimes_{(L \otimes_K F)} W'\big) \simeq \Big(\bigotimes_{i=1}^d e_i V'\Big) \otimes_F \Big(\bigotimes_{i=1}^d e_i W'\Big)$$

ist es offensichtlich. Dass die Operation die beiden Isomorphismen

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_K^L(V \otimes_L W) \otimes_K F \quad &\simeq \quad \mathcal{N}_F^{L \otimes_K F}\big((V \otimes_K W) \otimes_K F\big) \\
&\simeq \quad \mathcal{N}_F^{L \otimes_K F}\big((V \otimes_K F) \otimes_{(L \otimes_K F)} (W \otimes_K F)\big)
\end{aligned}$$

und

$$(\mathcal{N}_K^L(V) \otimes_K F) \otimes_F (\mathcal{N}_K^L(W) \otimes_K F) \simeq \mathcal{N}_F^{L \otimes_K F}(V \otimes_K F) \otimes_F \mathcal{N}_F^{L \otimes_K F}(W \otimes_K F)$$

respektiert, folgt aus der letzten Bemerkung. Wir müssen uns also nur noch mit der Isomorphie

$$\mathcal{N}_F^{L \otimes_K F}(V \otimes_K F) \simeq e_1(V \otimes_K F) \otimes \ldots \otimes e_d(V \otimes_K F)$$

beschäftigen. Da

$$\mathcal{N}_F^{L \otimes_K F}(V \otimes_K F) \simeq e_1 \ldots e_d^{[1,\ldots,1]} S_d(V \otimes_K F|F) \otimes_{S_d(L \otimes_K F|F)} F$$

ist, lässt sich die Verträglichkeit in diesem Fall anhand der in Lemma 4.3.3(1) angegebenen Isomorphie nachrechnen. □

4.5. **Die Norm einer bilinearen Abbildung.** Sei $R$ ein Ring, $A$ eine freie $R$-Algebra vom Rang $n$ und $\beta' \colon V \times W \longrightarrow A$ eine Bilinearform auf den $A$-Moduln $V, W$. Wie wir bereits in Abschnitt 4.2 gesehen haben, können wir die $A$-Linearform $\varphi_{\beta'} \colon V \otimes_A W \longrightarrow A$ zu einer $R$-Linearform

$$\mathcal{N}(\varphi_{\beta'}) \colon \mathcal{N}(V \otimes_A W) \longrightarrow R \qquad \text{mit } (v \otimes w)^{\otimes n} \otimes 1 \longmapsto N(\beta'(v, w))$$

für $v \in V, w \in W$ fortsetzten. Wir werden nun sehen, dass es auch möglich ist, diese Fortsetzung $R$-bilinear auf den Normen der $A$-Moduln $V, W$ zu definieren. Dabei gehen wir zunächst etwas allgemeiner vor.

Sei $M$ ein weiterer $A$-Modul und $\beta\colon V \times W \longrightarrow M$ eine $R$-bilineare Abbildung. Man erinnere sich an die bilineare Abbildung

$$S_n\beta\colon S_nV \times S_nW \longrightarrow S_nM$$

aus Satz 3.3.3 und an die Abbildung $\nu_R^A\colon S_nA \longrightarrow R$ aus Satz 4.2.3. Wir betrachten

$$(S_n\beta)_R\colon (S_nV \otimes_{S_nA} R) \times (S_nW \otimes_{S_nA} R) \longrightarrow (S_nM \otimes_{S_nA} R)$$

und erhalten dadurch eine bilineare Abbildung

$$\mathcal{N}_R^A\beta\colon \mathcal{N}_R^A(W) \times \mathcal{N}_R^A(V) \longrightarrow \mathcal{N}_R^A(M)$$

die auf der Norm $\mathcal{N}_R^A(V)$ des Moduls $V$ definiert ist. Diese bilineare Abbildung werden wir die *Norm der bilinearen Abbildung* $\beta$ nennen. Geht aus dem Kontext hervor, um welche Ringe es sich handelt, so schreiben wir manchmal auch $\mathcal{N}\beta$ anstatt $\mathcal{N}_R^A\beta$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{N}(V) \times \mathcal{N}(W) & \xrightarrow{\mathcal{N}\beta} & \mathcal{N}(M) \\
\| & & \| \\
\big(S_nV \otimes_{S_nA} R\big) \times \big(S_nW \otimes_{S_nA} R\big) & \xrightarrow{(S_n\beta)_R} & S_nM \otimes_{S_nA} R
\end{array}$$

**Bemerkung 4.5.1.** Der injektive Homomorphismus $S_rV \otimes S_rW \longrightarrow S_r(V \otimes W)$ induziert einen injektiven Homomorphismus

$$\mathcal{N}(V) \otimes \mathcal{N}(W) \longrightarrow \mathcal{N}(V \otimes W)$$

und $\varphi_{\mathcal{N}\beta}$ faktorisiert wie folgt:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{N}(V) \otimes \mathcal{N}(W) & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{N}\beta}} & \mathcal{N}(M) \\
\downarrow & & \| \\
\mathcal{N}(V \otimes W) & \xrightarrow{\mathcal{N}\varphi_\beta} & \mathcal{N}(M)
\end{array}$$

Wir können die bis hierhin erarbeiteten Ergebnisse in folgendem Satz zusammenfassen:

**Satz 4.5.2.** *Sei $A$ eine freie $R$-Algebra vom Rang $n$, und seien $V, W$ $A$-Moduln. Zu jeder $A$-bilinearen Abbildung $\beta\colon V \times W \longrightarrow M$ gibt es eine $R$-bilineare Abbildung*

$$\mathcal{N}_R^A\beta\colon \mathcal{N}_R^A(V) \times \mathcal{N}_R^A(W) \longrightarrow \mathcal{N}_R^A(M)$$

*mit*

$$\big((a_1v)^{\otimes n} \otimes 1, (a_2w)^{\otimes n} \otimes 1\big) \longmapsto N_R^A(a_1a_2) \cdot (\beta(v,w)^{\otimes n} \otimes 1)$$

*für $a_1, a_2 \in A$ und $v \in V, w \in W$.*

*Sei $B$ eine weitere $R$-Algebra, dann gilt auch hier*

$$(\mathcal{N}_R^A\beta)_B = \mathcal{N}_B^{A\otimes B}\beta_B$$

*Beweis.* Offensichtlich erfüllt $\mathcal{N}_R^A\beta$ die oben genannte Bedingung. □

**Satz 4.5.3.** *Sei $A$ eine freie $R$-Algebra, seien $V, V', W, W', M, M'$ freie $A$-Moduln von endlichem Rang, und seien $\beta\colon V \times W \longrightarrow M$ und $\beta'\colon V' \times W' \longrightarrow M'$ zwei $A$-bilineare Abbildungen. Dann faktorisiert $\mathcal{N}_R^A\beta \otimes \mathcal{N}_R^A\beta'$ wie folgt:*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{N}(V) \otimes \mathcal{N}(V') \times \mathcal{N}(W) \otimes \mathcal{N}(W') & \xrightarrow{\mathcal{N}\beta \otimes \mathcal{N}\beta'} & \mathcal{N}(M) \otimes \mathcal{N}(M') \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{N}(V \otimes V') \times \mathcal{N}(W \otimes W') & \xrightarrow{\mathcal{N}(\beta \otimes \beta')} & \mathcal{N}(M \otimes M')
\end{array}$$

*Beweis.* Dies folgt aus Bemerkung 3.3.7. □

**Korollar 4.5.4.** *Sei $A$ eine separable $K$-Algebra der Dimension $d$, oder sei $A = \Pi^d R$. Dann können wir $\mathcal{N}(V) \otimes \mathcal{N}(W)$ und $\mathcal{N}(V \otimes W)$ durch die kanonischen Isomorphismen aus Satz 4.4.4 bzw. Korollar 4.3.4 miteinander identifizieren. Insbesondere gilt*

$$\mathcal{N}\varphi_\beta = \varphi_{\mathcal{N}\beta} \quad \textit{und} \quad \mathcal{N}\beta \otimes \mathcal{N}\beta' = \mathcal{N}(\beta \otimes \beta')$$

Wie wir bereist angekündigt haben, interessiert uns besonders der Fall $M = A$. In diesem Fall ist $\beta$ eine $A$-Bilinearform, und wir erhalten mittels der Isomorphie $\varphi\colon \mathcal{N}_R^A(A) \simeq R$ eine $R$-Bilinearform

$$\mathcal{N}_R^A(V) \times \mathcal{N}_R^A(W) \longrightarrow R$$

die wir ebenfalls mit $\mathcal{N}_R^A\beta$ bezeichnen wollen. Genau genommen handelt es sich in diesem Fall um die Abbildung

$$\mathcal{N}_R^A\beta := \varphi \circ \big(S_n(\beta)\big)_R$$

Insbesondere gibt es zu jeder $A$-Bilinearform eine $R$-Bilinearform

$$\mathcal{N}_R^A(\beta)\colon \mathcal{N}_R^A(V) \times \mathcal{N}_R^A(W) \longrightarrow R$$

mit

$$\mathcal{N}_R^A(\beta)\big(v^{\otimes n} \otimes 1, w^{\otimes n} \otimes 1\big) = N_R^A\big(\beta(v,w)\big) \qquad \text{für } v \in V, w \in W$$

**Lemma 4.5.5.** *Sei $\beta\colon V \times V \longrightarrow M$ eine $A$-bilineare Abbildung. Dann gilt: Ist $\beta$ eine symmetrische bilineare Abbildung, dann ist auch $\mathcal{N}_R^A(\beta)$ symmetrisch.*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Bemerkung 3.3.4. □

4.5.1. *Die Norm von Bilinearformen über Produktalgebren.* Wir werden uns kurz mit der Situation aus Unterabschnitt 3.5.1 auseinandersetzen. Sei deshalb $A = \Pi^d R$ mit den orthogonalen Idempotenten $e_1, \dots, e_d$ mit $\sum_{i=1}^d e_i = 1$.

Seien $V, W$ und $M$ freie $A$-Moduln von endlichem Rang, und sei $\beta\colon V \times W \longrightarrow M$ eine $A$-bilineare Abbildung, dann definieren wir

$$\beta_i := \beta\big|_{e_iV \times e_iW} \quad \text{für } i = 1, \dots, d$$

Seien $v \in e_iV, w \in e_iW$. Dann ist $v = e_iv$ (bzw. $w = e_iw$), und wir erhalten

$$\beta_i(v,w) = \beta(e_iv, e_iw) = e_i^2\beta(v,w) = e_i\beta(v,w) \in e_iM$$

Schließlich haben wir eine (offensichtlich $R$-bilineare) Abbildung

$$\beta_i\colon e_iV \times e_iW \longrightarrow e_iM$$

**Bemerkung 4.5.6.** Ist $\beta\colon V \times V \longrightarrow A$ nicht ausgeartet, so sind auch

$$\beta_i\colon e_iV \times e_iV \longrightarrow R\ (\simeq e_iA) \quad \text{für } i = 1, \dots, d$$

nicht ausgeartet.

Wir werden $\mathcal{N}(V)$ und $e_1V \otimes \ldots \otimes e_dV$ über die kanonische Isomorphie aus Satz 4.3.2 miteinander identifizieren.

**Satz 4.5.7.** *In dieser Situation ist*

$$\mathcal{N}_R^A(\beta) = \beta_1 \otimes \ldots \otimes \beta_d$$

*Beweis.* Wir überprüfen die Behauptung anhand der entsprechenden linearen Abbildungen.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}(V) \otimes \mathcal{N}(W) \arrow[r, "\varphi(\mathcal{N}\beta)"] \arrow[d, "\simeq"', "\text{Satz 4.3.2}"] & \mathcal{N}(M) \arrow[d, "\simeq"', "\text{Satz 4.3.2}"] \\
\big(e_1V \otimes \ldots \otimes e_dV\big) \otimes \big(e_1W \otimes \ldots \otimes e_dW\big) \arrow[r, "\varphi_{\bigotimes_{i=1}^d \beta_i}"] & e_1M \otimes \ldots \otimes e_dM
\end{tikzcd}$$

Sei $1 \leq i_1, \ldots, i_d \leq n$, $1 \leq j_1, \ldots, j_d \leq m$ und

$$e_1 b_{i_1} \ldots e_d b_{i_d}^{[1,\ldots,1]} \in S_d V \quad \text{und} \quad e_1 c_{j_1} \ldots e_d c_{j_d}^{[1,\ldots,1]} \in S_d W$$

Dann sehen wir anhand von Beispiel 3.5.5, dass

$$e_1 b_{i_1} \ldots e_d b_{i_d}^{[1,\ldots,1]} \otimes 1 \otimes e_1 c_{j_1} \ldots e_d c_{j_d}^{[1,\ldots,1]} \otimes 1 \in \mathcal{N}(V) \otimes \mathcal{N}(W)$$

zum einen über

$$e_1 \beta(b_{i_1}, c_{j_1}) \ldots e_d \beta(b_{i_d}, c_{j_d})^{[1,\ldots,1]} \otimes 1 \in \mathcal{N}(M)$$

auf

$$e_1 \beta(b_{i_1}, c_{j_1}) \otimes \ldots \otimes e_d \beta(b_{i_d}, c_{j_d}) = \beta_1(b_{i_1}, c_{j_1}) \otimes \ldots \otimes \beta_d(b_{i_d}, c_{j_d}) \in e_1 M \otimes \ldots \otimes e_d M$$

und zum anderen über

$$e_1 b_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_d b_{i_d} \otimes e_1 c_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_d c_{j_d} \in e_1 V \otimes \ldots \otimes e_d V \otimes e_1 W \otimes \ldots \otimes e_d W$$

ebenfalls auf

$$\beta_1(b_{i_1}, c_{j_1}) \otimes \ldots \otimes \beta_d(b_{i_d}, c_{j_d}) \in e_1 M \otimes \ldots \otimes e_d M$$

abgebildet wird. □

**Korollar 4.5.8.** *Sei $\beta\colon V \times V \longrightarrow A$ eine nicht ausgeartete $A$-Bilinearform, dann ist auch $\mathcal{N}_R^A(\beta)$ nicht ausgeartet.*

4.5.2. *Die Norm von Bilinearformen über separablen Algebren.* Wir werden uns nun mit einer letzten wichtigen Aussage über Bilinearformen beschäftigen.

**Satz 4.5.9.** *Sei $L$ eine separable $K$-Algebra endlicher Dimension, $V$ ein freies $L$-Modul von endlichem Rang und $\beta\colon V \times V \longrightarrow L$ eine nicht ausgeartete $L$-Bilinearform. Dann ist auch die $K$-Bilinearform*

$$\mathcal{N}_K^L \beta\colon \mathcal{N}_K^L(V) \times \mathcal{N}_K^L(V) \longrightarrow K$$

*nicht ausgeartet.*

*Beweis.* Wir wissen, dass für die Galoiserweiterung $F|K$ die bilineare Abbildung $\mathcal{N}_F^{F\otimes L}(\beta_F)$ nicht ausgeartet ist (siehe Korollar 4.5.8).

Unter der Isomorphie

$$\mathcal{N}_F^{F\otimes L}(V \otimes F) \simeq \mathcal{N}_K^L(V) \otimes F \quad \text{ist} \quad \mathcal{N}_F^{F\otimes L}(\beta_F) = (\mathcal{N}_K^L \beta)_F$$

und auch die bilineare Abbildung $\mathcal{N}_K^L \beta$ ist nicht ausgeartet. □

# 5. Der multiplikative Transfer auf dem Grothendieck-Witt-Ring

## 5.1. Eine Erweiterung für den Begriff der Norm eines Moduls.

5.1.1. *Die Erweiterung für Algebren.* Sei $A$ eine freie $R$-Algebra vom Rang $r$ und $B$ eine beliebige $R$-Algebra.

Sei $\alpha_{(r,l)} \in \mathcal{P}_{(r,l)}$. Wir haben in Abschnitt 3.4.2 schon die Ringerweiterung $S_{\alpha_{(r,l)}}A \supset S_r A$ kennengelernt. In diesem Abschnitt werden wir uns mit folgender Konstruktion auseinandersetzen:

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(r,l)}}(A|R) := S_{\alpha_{(r,l)}}(A|R) \otimes_{S_r(A|R)} R$$

Offensichtlich ist $\mathcal{C}_r(A|R) = \mathcal{N}_R^A(A) \simeq R$.

Wie wir gleich sehen werden, respektiert diese Konstruktion einen Grundringwechsel.

**Bemerkung 5.1.1.** Sei $\alpha_{(r,l)} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathcal{P}_{(r,l)}$. Dann haben wir eine kanonische $B$-Isomorphie

$$(S_{\alpha_{(r,l)}}(A|R) \otimes_{S_r(A|R)} R) \otimes_R B \simeq (S_{\alpha_{(r,l)}}(A|R) \otimes_R B) \otimes_{(S_r(A|R) \otimes_R B)} (R \otimes_R B)$$

vermöge

$$(a_1^{[\gamma(\alpha_1,k_1)]} \otimes \dots \otimes a_l^{[\gamma(\alpha_l,k_l)]} \otimes a) \otimes b \mapsto (a_1^{[\gamma(\alpha_1,k_1)]} \otimes \dots \otimes a_l^{[\gamma(\alpha_l,k_l)]} \otimes 1) \otimes (1 \otimes ab)$$

für alle $a \in R, b \in B$ und elementarsymmetrische $a_i^{[\gamma(\alpha_i,k_i)]} \in S_{\alpha_i}A$ für $i = 1, \dots, l$.

**Lemma 5.1.2.** *Wir haben folgende $B$-Isomorphie:*

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(r,l)}}(A|R) \otimes_R B \simeq \mathcal{C}_{\alpha_{(r,l)}}(A \otimes_R B|B)$$

*mit*

$$(a_1^{[\gamma(\alpha_1,k_1)]} \otimes \dots \otimes a_l^{[\gamma(\alpha_l,k_l)]} \otimes 1) \otimes 1 \mapsto (a_1 \otimes 1)^{[\gamma(\alpha_1,k_1)]} \otimes \dots \otimes (a_l \otimes 1)^{[\gamma(\alpha_l,k_1)]} \otimes 1$$

*für elementarsymmetrische Tensoren $a_i^{[\gamma(\alpha_i,k_i)]} \in S_{\alpha_i}A$ für $i = 1, \dots, l$.*

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\alpha_{(r,l)}}(A|R) \otimes_R B &= \big(S_{\alpha_{(r,l)}}(A|R) \otimes_{S_r A} R\big) \otimes_R B \\
&\overset{\text{Bem.5.1.1}}{\simeq} \big(S_{\alpha_{(r,l)}}(A|R) \otimes_R B\big) \otimes_{(S_r(A|R)\otimes_R B)} \big(R \otimes_R B\big) \\
&\overset{\text{Satz 3.4.2}}{\simeq} S_{\alpha_{(r,l)}}(A \otimes_R B|B) \otimes_{S_r(A \otimes_R B|B)} B \\
&= \mathcal{C}_{\alpha_{(r,l)}}(A \otimes_R B|B)
\end{aligned}$$

Folgt man den genannten Isomorphismen, dann sieht man schnell, dass Elemente aus $\mathcal{C}_{\alpha_{(r,l)}}(A|R) \otimes_R B$ wie erwartet abgebildet werden. □

Für den Rest dieses Unterabschnitts werden wir uns mit dem Spezialfall $A = \Pi^d R$ und dessen Folgerungen auseinandersetzen. Sei $\alpha_{(d,l)} \in \mathcal{P}_{(d,l)}$. Wir betrachten nun $\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}A$. Im Rückblick auf Bemerkung 3.5.2 seien

$$E_1 = e_{i_{11}\dots i_{1k_1}}^{[\gamma(\alpha_1,k_1)]} \in S_{\alpha_1}A, \ \dots \ , E_l = e_{i_{l1}\dots i_{lk_l}}^{[\gamma(\alpha_l,k_l)]} \in S_{\alpha_l}A$$

und sei

$$\mathbb{E} = e_{i_{11}\dots i_{1k_1}\dots i_{lk_l}}^{[\gamma_{11},\dots,\gamma_{1k_1},\dots,\gamma_{lk_l}]} \in S_n A$$

der elementarsymmetrische Tensor, der von den (im Allgemeinen nicht paarweise verschiedenen) idempotenten Elementen $e_{i_{11}}, \dots, e_{i_{1k_1}}, \dots, e_{i_{lk_l}} \in A$ erzeugt wird. Es sei an dieser Stelle Folgendes erwähnt:

**Bemerkung 5.1.3.**

$$\nu_R^A(\mathbb{E}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathbb{E} = e_{1\dots d}^{[1,\dots,1]} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

*Beweis.* Dies ist eine Umformulierung von Lemma 4.3.1. □

Wir erinnern uns an Unterabschnitt 3.5.1 bzw. Bemerkung 3.5.1. Dort haben wir gesehen, dass

$$S_{\alpha_{(d,l)}} A = \bigoplus_{E_1 \in \mathcal{E}_{\alpha_1}} \cdots \bigoplus_{E_l \in \mathcal{E}_{\alpha_l}} E_1 \otimes \ldots \otimes E_l \cdot R$$

Also ist nach Bemerkung 3.5.2

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}} A &= \bigoplus_{(E_1,\dots,E_l)\in\mathcal{E}} (E_1 \otimes \ldots \otimes E_l \cdot R) \otimes_{S_d A} R \\ &\simeq \bigoplus_{(E_1,\dots,E_l)\in\mathcal{E}} E_1 \otimes \ldots \otimes E_l \cdot R \end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{E} = \left\{ (E_1, \dots, E_l) \middle| E_j \in \mathcal{E}_{\alpha_j} \text{ für } 1 \le j \le l \text{ und } \{i_{11}, \dots, i_{1k_1}, \dots, i_{lk_l}\} = \{1, \dots, d\} \right\}$$

Aus unseren Überlegungen folgt sofort:

**Lemma 5.1.4.** *$\mathcal{E}$ ist eine $R$-Basis von $\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}} A$. Insbesondere ist $\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}} A$ ein freier $R$-Modul vom Rang*

$$\mathrm{Rang}_R \left( \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}} A \right) = \binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_l}{\alpha_1} \cdot \binom{\alpha_2 + \cdots + \alpha_l}{\alpha_2} \cdots \binom{\alpha_l}{\alpha_l}$$

**Korollar 5.1.5.** *Sei $K$ ein Körper und $L$ eine separable $K$-Algebra der Dimension $d$. Dann hat $\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}} L$ die Dimension*

$$\dim_K \left( \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}} L \right) = \binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_l}{\alpha_1} \cdot \binom{\alpha_2 + \cdots + \alpha_l}{\alpha_2} \cdots \binom{\alpha_l}{\alpha_l}$$

*Beweis.* Dies folgt ähnlich wie Satz 4.4.2, indem man $\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(L)$ mit dem algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von $K$ (oder einer geeigneten Galoiserweiterung) tensoriert. Wir haben in Lemma 5.1.2 gesehen, dass

$$(\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}} L) \otimes_K \overline{K} \simeq \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(L \otimes_K \overline{K}) = \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(\Pi^d \overline{K})$$

Wir wissen aus Unterabschnitt 1.3.1, dass

$$\dim_K \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}} L = \dim_{\overline{K}} (\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}} L \otimes_K \overline{K}) = \dim_{\overline{K}} \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(\Pi^d \overline{K})$$

und somit folgt die Behauptung aus dem letzten Lemma. □

5.1.2. *Die Erweiterung für Moduln.* Sei auch in diesem Unterabschnitt $A$ eine freie $R$-Algebra vom Rang $d$, und seien $V_1, \dots, V_l$ freie $A$-Moduln von endlichem Rang. Wir wissen, dass die $V_i$ auch als $R$-Moduln gesehen werden können, und haben für $\alpha_1, \dots, \alpha_l > 0$ schon die Konstruktion $S_{(\alpha_1,\dots,\alpha_l)}(V_1, \dots, V_l|R)$ kennengelernt (siehe Abschnitt 2.1). $S_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \dots, V_l|R)$ ist auf natürliche Weise ein $S_{\alpha_{(d,l)}}(A|R)$-Modul. Wir definieren

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \dots, V_l|R) := S_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \dots, V_l|R) \otimes_{(S_{\alpha_{(d,l)}}(A|R))} \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(A|R)$$

Offensichtlich ist $\mathcal{C}_d(V_1|R) = \mathcal{N}_R^A(V_1)$.

**Bemerkung 5.1.6.** Diese Konstruktion hat ähnliche Eigenschaften, wie wir sie schon für die Norm von Moduln nachgerechnet haben.

(1) Seien $V_1', \ldots, V_l'$ weitere freie $A$-Moduln, dann haben wir einen injektiven $R$-Homomorphismus:

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \ldots, V_l) \otimes \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(V_1', \ldots, V_l') \longrightarrow \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(V_1 \otimes V_1', \ldots, V_l \otimes V_l')$$

(Wie wir später sehen werden, ist diese Abbildung sogar ein Isomorphismus, wenn $A = \Pi^d R$ ist, oder wenn $A$ eine separable $K$-Algebra ist. Siehe Satz 5.1.7.)

(2) Sei $B$ eine $R$-Algebra, dann haben wir eine kanonische $B$-Isomorphie

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \ldots, V_l|R) \otimes_R B \simeq \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(V_1 \otimes_R B, \ldots, V_l \otimes_R B|B)$$

Es folgt noch eine Eigenschaft, die wir in ähnlicher Form schon in Kapitel 4 (Satz 4.3.2) gesehen haben.

**Satz 5.1.7.** *Sei $A = \Pi^d R$, $\alpha_{(d,l)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathcal{P}_{(d,l)}$, und seien $V_1, \ldots, V_l$ freie $A$-Moduln von endlichem Rang. Dann ist*

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \ldots, V_l) \simeq \bigoplus_{(E_1,\ldots,E_l)\in\mathcal{E}} E_1 S_{\alpha_1} V_1 \otimes \ldots \otimes E_l S_{\alpha_l} V_l$$

*Nach Lemma 3.5.4 wissen wir, dass*

$$E_j S_{\alpha_j} V_j \simeq e_{i_{j1}} V_j \otimes \ldots \otimes e_{i_{j\alpha_j}} V_j \quad \textit{für } E_j = e^{[1,\ldots,1]}_{i_{j1},\ldots,i_{j\alpha_j}}$$

*Beweis.* Mit der Darstellung von $\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}A$ aus dem letzten Unterabschnitt können wir $\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \ldots, V_l)$ wie folgt darstellen:

$$S_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \ldots, V_l) \otimes_{S_{\alpha_{(d,l)}}A} \left( \bigoplus_{(E_1,\ldots,E_l)\in\mathcal{E}} (E_1 \otimes \ldots \otimes E_l \cdot R) \otimes_{S_d A} R \right)$$

(Dabei ist $\mathcal{E}$ wie vorhin.) Nun ist

$$S_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \ldots, V_l) = \bigoplus_{E_1\in\mathcal{E}_1,\ldots,E_l\in\mathcal{E}_l} E_1 S_{\alpha_1} V_1 \otimes \ldots \otimes E_l S_{\alpha_l} V_l$$

und die $E_1 \otimes \ldots \otimes E_l \in S_{\alpha_{(d,l)}}$ mit $E_1 \in \mathcal{E}_1, \ldots, E_l \in \mathcal{E}_l$ sind orthogonale Idempotente, so dass

$$\begin{aligned} & S_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \ldots, V_l) \otimes_{S_{\alpha_{(d,l)}}A} \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}A \\ = & \bigoplus_{(E_1,\ldots,E_l)\in\mathcal{E}} \left( E_1 S_{\alpha_1} V_1 \otimes \ldots \otimes E_l S_{\alpha_l} V_l \right) \otimes_{S_{\alpha_{(d,l)}}A} (E_1 \otimes \ldots \otimes E_l \cdot R) \end{aligned}$$

und wir erkennen, dass die Behauptung erfüllt ist. □

## 5.2. Der Spezialfall $\mathcal{C}_{(k,d-k)}A$.

Sei $A$ eine freie $R$-Algebra vom Rang $d$ und $k \leq d$. Wir betrachten folgenden $R$-Algebra-Homomorphismus:

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\nu}_k\colon & S_k A & \longrightarrow & \mathcal{C}_{(k,d-k)}A \\ & \downarrow & & \uparrow \\ & S_k A \otimes 1 & \longrightarrow & S_k A \otimes_R S_{d-k} A \end{array}$$

vermöge $\quad \widetilde{\nu}_k(x) = (x \otimes 1^{\otimes d-k}) \otimes 1$ für $x \in S_k A$.

Offensichtlich ist $\widetilde{\nu}_d = \nu_R^A$.

**Bemerkung 5.2.1.** Der Homomorphismus $\widetilde{\nu}_k$ ist surjektiv.

*Beweis.* Lemma 3.4.3 besagt, dass es zu $a \in S_k A \otimes S_{d-k} A$ symmetrische Tensoren $x_i \in S_k A$ und $y_i \in S_d A$ $(i = 1, \ldots, n)$ gibt, so dass

$$a = \sum_{i=1}^{n} (x_i \otimes 1^{\otimes d-k}) \cdot y_i$$

Es ist $\big((x_i \otimes 1^{\otimes d-k}) \cdot y_i\big) \otimes 1 = (x_i \otimes 1^{\otimes d-k}) \otimes \nu_R^A(y_i) \in \mathcal{C}_{(k,d-k)}A$, und wir haben

$$\sum_{i=1}^{n} \big(\nu_R^A(y_i) \cdot x_i\big) \in S_k A$$

als mögliches Urbild von $a \otimes 1 \in \mathcal{C}_{(k,d-k)}A$. $\square$

Seien $i, j \geq 0$ und $i + j \leq d$. Wir werden uns nun mit zwei Spezialfällen beschäftigen, in denen die Spur-Abbildung

$$\mathcal{T}_{ij} \colon S_i A \otimes S_j A \longrightarrow S_{i+j} A$$

eine Abbildung

$$\widehat{\mathcal{T}}_{ij} \colon \mathcal{C}_{(i,d-i)}A \otimes \mathcal{C}_{(j,d-j)}A \longrightarrow \mathcal{C}_{(i+j,d-i-j)}A$$

induziert.

5.2.1. *$\mathcal{C}_{(i,d-i)}A$ einer Produktalgebra $A$.* Sei $A = \Pi^d R$. Wir können folgende Aussage über den Kern von $\widetilde{\nu}_k$ machen:

**Bemerkung 5.2.2.** Kern $\widetilde{\nu}_k$ wird erzeugt von den Elementen

$$e_{i_1 \ldots i_l}^{[\alpha_{(k,l)}]} \in \mathcal{E}_k \quad \text{mit } \alpha_{(k,l)} \neq (1, \ldots, 1)$$

*Beweis.* Wie wir bereits gesehen haben, bilden die $e_{i_1 \ldots i_l}^{[\alpha_{(k,l)}]} \in \mathcal{E}_k$ eine Basis von $S_k A$. Unter $\widetilde{\nu}_k$ wird wie folgt abgebildet:

$$e_{i_1 \ldots i_l}^{[\alpha_{(k,l)}]} \quad \longmapsto \quad (e_{i_1 \ldots i_l}^{[\alpha_{(k,l)}]} \otimes 1^{\otimes d-k}) \otimes 1 = \sum_{E \in \mathcal{E}_{d-k}} (e_{i_1 \ldots i_l}^{[\alpha_{(k,l)}]} \otimes E) \otimes 1$$

Nun ist, wie wir bereits in der Vorbereitung von Korollar 5.1.5 gesehen haben,

$$\mathcal{C}_{(k,d-k)}A = \bigoplus_{(E_1,E_2) \in \mathcal{E}} E_1 \otimes E_2 \cdot R$$

mit $\mathcal{E} = \big\{(E_1, E_2) \big| E_1 \in \mathcal{E}_k, E_2 \in \mathcal{E}_{d-k} \text{ und } \{i_{11}, \ldots, i_{1l}, i_{21} \ldots, i_{2l'}\} = \{1, \ldots, d\}\big\}$.

Folglich sind die Bilder von zwei Basiselementen $e_{i_1 \ldots i_l}^{[\alpha_{(k,l)}]} \neq e_{j_1 \ldots j_{l'}}^{[\alpha'_{(k,l')}]}$ von $S_k A$ linear unabhängig.

Aus Bemerkung 1.5.2 und Bemerkung 3.5.2 wissen wir, dass

$$\big(e_{i_1 \ldots i_l}^{[\alpha_{(k,l)}]} \otimes 1\big) \cdot e_{1 \ldots d}^{[1,\ldots,1]} = \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_{d-k}} e_{i_1 \ldots i_l}^{[\alpha_{(k,l)}]} \otimes E \right) \cdot e_{1 \ldots d}^{[1,\ldots,1]} \neq 0$$

genau dann, wenn $\alpha_{(k,l)} = (1, \ldots, 1)$. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\widetilde{\nu}_i \otimes \widetilde{\nu}_j \colon S_i A \otimes S_j A \longrightarrow \mathcal{C}_{(i,d-i)}A \otimes \mathcal{C}_{(j,d-j)}A$$

**Bemerkung 5.2.3.** Es ist

$$\mathcal{T}_{ij}(\operatorname{Kern} \widetilde{\nu}_i \otimes \widetilde{\nu}_j) \subset \operatorname{Kern} \widetilde{\nu}_{i+j}$$

*Beweis.* Kern $\widetilde{\nu}_i \otimes \widetilde{\nu}_j$ wird erzeugt von den Elementen $x \otimes y \in S_{(i,j)}A$ mit

$$x \in \operatorname{Kern} \widetilde{\nu}_i \text{ und } y \in S_j A \quad \text{oder} \quad y \in \operatorname{Kern} \widetilde{\nu}_j \text{ und } x \in S_i A$$

Sei ohne Einschränkung $e_{k_1 \ldots k_l}^{[\alpha_{(j,l)}]} \in \mathcal{E}_j$ mit $\alpha_{(j,l)} \neq (1, \ldots, 1)$ ein Erzeuger von Kern $\widetilde{\nu}_j$, so ist offensichtlich

$$\mathcal{T}_{ij}(x \otimes e_{k_1 \ldots k_l}^{[\alpha_{(j,l)}]}) \neq e_{1 \ldots d}^{[1,\ldots,1]}$$

und damit nach der letzten Bemerkung 5.2.2 ein Element aus Kern $\widetilde{\nu}_{i+j}$.

Wir sehen also, dass die Erzeuger von Kern $\widetilde{\nu}_i \otimes \widetilde{\nu}_j$ nach Kern $\widetilde{\nu}_{i+j}$ abgebildet werden. $\square$

Wie wir im folgenden Satz sehen werden, folgt aus dieser Bemerkung die Existenz einer solchen Abbildung $\widehat{\mathcal{T}}_{ij}$ für den Spezialfall $A = \Pi^d R$.

$$\begin{array}{ccc} S_i A \otimes S_j A & \xrightarrow{\mathcal{T}_{ij}} & S_{i+j} A \\ {\scriptstyle \widetilde{\nu}_i \otimes \widetilde{\nu}_j}\big\downarrow & & {\scriptstyle \widetilde{\nu}_{i+j}}\big\downarrow \\ \widehat{\mathcal{T}}_{ij} \colon \mathcal{C}_{(i,d-i)} A \otimes \mathcal{C}_{(j,d-j)} A & \longrightarrow & \mathcal{C}_{(i+j,d-i-j)} A \end{array}$$

**Satz 5.2.4.** *Sei $A = \Pi^d$. Dann induziert die Spur-Abbildung $\mathcal{T}_{ij}$ eine eindeutige Abbildung*

$$\widehat{\mathcal{T}}_{ij} \colon \mathcal{C}_{(i,d-i)} A \otimes \mathcal{C}_{(j,d-j)} A \longrightarrow \mathcal{C}_{(i+j,d-i-j)} A$$

*Diese ist $\mathcal{C}_{(i+j,d-i-j)} A$-linear und es gilt*

$$\widetilde{\nu}_{i+j} \circ \mathcal{T}_{ij} = \widehat{\mathcal{T}}_{ij} \circ (\widetilde{\nu}_i \otimes \widetilde{\nu}_j)$$

*Beweis.* Nach Bemerkung 5.2.1 sind die Abbildungen $\widetilde{\nu}_i$ und $\widetilde{\nu}_j$ surjektiv. Folglich ist auch die Abbildung $\widetilde{\nu}_i \otimes \widetilde{\nu}_j$ surjektiv und wir finden zu jedem Element

$$\xi \in \mathcal{C}_{(i,d-i)} A \otimes \mathcal{C}_{(j,d-j)} A$$

ein Urbild

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k \in S_i A \otimes S_j A \qquad \text{mit } x_k \in S_i A \text{ und } y_k \in S_j A \text{ für } k = 1, \ldots, n$$

Nach der letzten Bemerkung legt die folgende Gleichung die Abbildung $\widehat{\mathcal{T}}_{ij}$ eindeutig fest:

$$\widehat{\mathcal{T}}_{ij}(\xi) := \widetilde{\nu}_{i+j}\Big(\sum_{k=1}^{n} \mathcal{T}_{ij}(x_k \otimes y_k)\Big) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\nu}_{i+j}\big(\mathcal{T}_{ij}(x_k \otimes y_k)\big) \qquad \square$$

5.2.2. *$\mathcal{C}_{(k,d-k)}$ einer separablen $K$-Algebra.* Ist $L$ eine separable $K$-Algebra von Rang $d$, dann existiert, wie wir in Unterabschnitt 1.5.3 gesehen haben, eine Galoiserweiterung $F|K$ mit $L \otimes_K F \simeq \Pi^d F$. Wir werden in diesem Unterabschnitt die beiden $F$-Algebren über diese Isomorphie miteinander identifizieren. Die Galoisgruppe von $F|K$ werden wir mit $\mathcal{G}$ bezeichnen.

Sei $0 \leq i \leq d$. Wir wissen, dass $\mathcal{C}_{(i,d-i)}(L|K)$ einen Grundringwechsel respektiert, demnach ist

$$\mathcal{C}_{(i,d-i)}(L|K) \otimes_K F \simeq \mathcal{C}_{(i,d-i)}(L \otimes_K F|F) = \mathcal{C}_{(i,d-i)}(\Pi^d F|F)$$

Weiter sei $0 \leq j \leq d$ mit $i+j \leq d$. Dann existiert, wie wir im letzten Unterabschnitt gesehen haben, die gewünschte Abbildung

$$\widehat{T}_{ij} \colon \mathcal{C}_{(i,d-i)}(L \otimes_K F|F) \otimes \mathcal{C}_{(j,d-j)}(L \otimes_K F|F) \longrightarrow \mathcal{C}_{(i+j,d-i-j)}(L \otimes_K F|F)$$

Wir bezeichnen die Abbildung in diesem Unterabschnitt mit $\widehat{T}_{ij}$, damit wir sie besser von der gesuchten Abbildung

$$\widehat{\mathcal{T}}_{ij} \colon \mathcal{C}_{(i,d-i)}(L|K) \otimes \mathcal{C}_{(j,d-j)}(L|K) \longrightarrow \mathcal{C}_{(i+j,d-i-j)}(L|K)$$

unterscheiden können.

Außerdem haben wir eine kanonische Isomorphie

$$\mathcal{C}_{(k,d-k)}(L|K) \simeq (\mathcal{C}_{(k,d-k)}(L|K) \otimes_K F)^{\mathcal{G}} \quad \text{vermöge } \xi \mapsto \xi \otimes 1$$

**Lemma 5.2.5.** *Die Isomorphie*

$$\mathcal{C}_{(k,d-k)}(L \otimes F|F) \simeq \mathcal{C}_{(k,d-k)}(L|K) \otimes_K F$$

*respektiert die Operation der Galoisgruppe $\mathcal{G}$ von $F|K$.*

*Insbesondere ist*

$$\mathcal{C}_{(k,d-k)}(L \otimes F|F)^{\mathcal{G}} \simeq \big(\mathcal{C}_{(k,d-k)}(L|K) \otimes_K F\big)^{\mathcal{G}}$$

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{(k,d-k)}(L \otimes F|F) &= S_{(k,d-k)}(L \otimes_K F|F) \otimes_{S_d(L \otimes_K F|F)} F \\
&\simeq (S_{(k,d-k)}(L|K) \otimes_K F) \otimes_{S_d(L|K) \otimes_K F} (K \otimes_K F) \\
&\simeq (S_{(k,d-k)}(L|K) \otimes_{S_d(L|K)} K) \otimes_K F) \\
&= \mathcal{C}_{(k,d-k)}(L|K) \otimes_K F
\end{aligned}$$

Die Isomorphie

$$\begin{aligned}
S_{(k,d-k)}(L \otimes_K F|F) \otimes_{S_d(L \otimes_K F|F)} F &\simeq (S_{(k,d-k)}(L|K) \otimes_{S_d(L|K)} K) \otimes_K F) \\
\big((v \otimes 1)^{[\alpha_{(k,l_1)}]} \otimes (w \otimes 1)^{[\gamma_{(d-k,l_2)}]}\big) \otimes a &\mapsto (v^{[\alpha_{(k,l_1)}]} \otimes w^{[\gamma_{(d-k,l_2)}]} \otimes 1) \otimes a
\end{aligned}$$

für $a \in F$ und elementarsymmetrische Tensoren $(v \otimes 1)^{[\alpha_{(k,l_1)}]} \in S_k(L \otimes_K F|F)$ und $(w \otimes 1)^{[\gamma_{(d-k,l_2)}]} \in S_{d-k}(L \otimes_K F|F)$ ist, wie man sieht, mit der Operation verträglich. □

**Lemma 5.2.6.** *Es gilt*

$$\widehat{T}_{ij} \circ g = g \circ \widehat{T}_{ij} \quad \textit{für } g \in \mathcal{G}$$

*Damit ist insbesondere*

$$\widehat{T}_{ij}\big(\mathcal{C}_{(i,d-i)}(\Pi^d F|F)^{\mathcal{G}} \otimes \mathcal{C}_{(j,d-j)}(\Pi^d F|F)^{\mathcal{G}}\big) \subset \mathcal{C}_{(i+j,d-i-j)}(\Pi^d F|F)^{\mathcal{G}}$$

*Beweis.* Um diese Behauptung einfacher folgern zu können, werden wir die folgenden beiden Abbildungen betrachten:

$$\begin{aligned}
T_{i,j} \colon T^i_F(\Pi^d F) \otimes T^j_F(\Pi^d F) &\longrightarrow T^{i+j}_F(\Pi^d F) \text{ vermöge } x \otimes y \mapsto \sum_{\kappa \in K_{i,j}} \kappa \bullet (x \otimes y) \\
\mathcal{V}_i \colon T^i_F(\Pi^d F) &\longrightarrow T^n_F(\Pi^d F) \quad \text{vermöge} \qquad x \mapsto x \otimes 1^{\otimes n-i}
\end{aligned}$$

für zwei Tensoren $x \in T^i_F(\Pi^d F)$ und $y \in T^j_F(\Pi^d F)$.

Es ist offensichtlich, dass

$$T_{i,j}\big|_{S_i(\Pi^d F) \otimes S_j(\Pi^d F)} = \mathcal{T}_{ij} \quad \text{und} \quad \mathcal{V}_i\big|_{S_i(\Pi^d F)} = \widetilde{\nu}_i$$

Seien $x_1, \dots, x_i \in \Pi^d F$, $g \in \mathcal{G}$ und $\sigma \in \mathcal{S}_i$.

Wir sehen schnell, dass

$$\sigma \bullet g(x_1 \otimes \ldots \otimes x_i) = g(x_{\sigma^{-1}1}) \otimes \ldots \otimes g(x_{\sigma^{-1}i}) = g\big(\sigma \bullet (x_1 \otimes \ldots \otimes x_i)\big)$$

Dadurch erkennen wir, dass

$$g \circ T_{i,j} = T_{i,j} \circ g \qquad (\text{bzw., dass } \; g \circ \mathcal{T}_{ij} = \mathcal{T}_{ij} \circ g)$$

Dass $g \circ \widetilde{\nu}_i = \widetilde{\nu}_i \circ g$ ist, sehen wir sofort, denn

$$g \circ \mathcal{V}_i(x_1 \otimes \ldots \otimes x_i) = g(x_1 \otimes \ldots \otimes x_i \otimes 1^{\otimes n-i}) = \mathcal{V}_i \circ g(x_1 \otimes \ldots \otimes x_i) \qquad \square$$

**Satz 5.2.7.** *Sei $0 \leq i \leq d$, und sei $0 \leq j \leq d$, so dass $i + j \leq d$. Weiter sei $L$ eine separable $K$-Algebra, dann induziert die Spur $\mathcal{T}_{ij}$ eine $\mathcal{C}_{(i+j,d-i-j)}(L|K)$-lineare Abbildung*

$$\widehat{\mathcal{T}}_{ij} \colon \mathcal{C}_{(i,d-i)}(L|K) \otimes \mathcal{C}_{(j,d-j)}(L|K) \longrightarrow \mathcal{C}_{(i+j,d-i-j)}(L|K)$$

*Beweis.* Wir können jedem $x \in \mathcal{C}_{(i,d-i)}(L|K)$ auf kanonische Weise ein

$$y \in \mathcal{C}_{(k,d-k)}(\Pi^d F|F)^{\mathcal{G}}$$

zuordnen. Wir wissen aus Satz 5.2.4, dass wir eine solche Abbildung auf Produktalgebren definieren können. Die Abbildung $\widehat{\mathcal{T}}_{ij}$ wird durch das folgende Diagramm erklärt:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{T}}_{ij}\colon \mathcal{C}_{(i,d-i)}(L|K) \otimes \mathcal{C}_{(j,d-j)}(L|K) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{C}_{(i+j,d-i-j)}(L|K) \\
\mathcal{C}_{(i,d-i)}(L \otimes F|F)^{\mathcal{G}} \otimes \mathcal{C}_{(j,d-j)}(L \otimes F|F)^{\mathcal{G}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}_{(i+j,d-i-j)}(L \otimes F|F)^{\mathcal{G}} \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d] \\
\mathcal{C}_{(i,d-i)}(\Pi^d F|F) \otimes \mathcal{C}_{(j,d-j)}(\Pi^d F|F) \arrow[r, "\widehat{\mathcal{T}}_{ij}"] & \mathcal{C}_{(i+j,d-i-j)}(\Pi^d F|F)
\end{tikzcd}$$

□

**Bemerkung 5.2.8.** Wir haben $\widehat{\mathcal{T}}_{ij}$ so konstruiert, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
S_i(L|K) \otimes S_j(L|K) \arrow[r, "\mathcal{T}_{ij}"] \arrow[d, "\widetilde{\nu}_i \otimes \widetilde{\nu}_{k-i}"'] & S_{i+j}(L|K) \arrow[d, "\widetilde{\nu}_k"'] \\
\mathcal{C}_{(i,d-i)}(L|K) \otimes \mathcal{C}_{(j,d-j)}(L|K) \arrow[r, "\widehat{\mathcal{T}}_{ij}"] & \mathcal{C}_{(i+j,d-i-j)}(L|K)
\end{tikzcd}$$

Wir kommen nun zu einer schönen Formel für die Norm:

**Korollar 5.2.9.** *Sei $L$ eine separable $K$-Algebra der Dimension $d$. Seien $x, y \in L$, und sei $k \leq d$.*

$$\widetilde{\nu}_k\big((x+y)^{\otimes k}\big) = \sum_{i=0}^{k} \widehat{\mathcal{T}}_{i\,k-i}\big(\widetilde{\nu}_i(x^{\otimes i}) \otimes \widetilde{\nu}_{k-i}(y^{\otimes k-i})\big)$$

*Da $\widetilde{\nu}_d = N_K^L$ ist, ist insbesondere*

$$N_K^L(x+y) = \sum_{i=0}^{d} \widehat{\mathcal{T}}_{i\,d-i}\big(\widetilde{\nu}_i(x^{\otimes i}) \otimes \widetilde{\nu}_{d-i}(y^{\otimes d-i})\big)$$

*(Diese Formel gilt natürlich auch falls $L = \Pi^d R$ eine Produktalgebra ist.)*

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nu}_k\big((x+y)^{\otimes k}\big) &= \widetilde{\nu}_k\Big(\sum_{i=0}^{k} \mathcal{T}_{ik-i}(x^{\otimes i} \otimes y^{\otimes k-i})\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \widetilde{\nu}_k\big(\mathcal{T}_{ik-i}(x^{\otimes i} \otimes y^{\otimes k-i})\big) \\
&\overset{\text{Bem.5.2.8}}{=} \sum_{i=0}^{k} \widehat{\mathcal{T}}_{ik-i}\big(\widetilde{\nu}_i(x^{\otimes i}) \otimes \widetilde{\nu}_{k-i}(y^{\otimes k-i})\big)
\end{aligned}$$

□

5.3. **Der Grothendieck-Witt-Ring.** Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Ring-Struktur auf bestimmten Äquivalenzklassen von regulären symmetrischen Bilinearformen zu definieren. Sei $K$ ein Körper und $V$ ein $K$-Vektorraum endlicher Dimension. Wir nehmen an, dass $\operatorname{char} K \neq 2$ ist. Sei

$$\beta\colon V \times V \longrightarrow K$$

eine symmetrische Bilinearform über $K$, dann nennen wir $(V, \beta)$ einen $K$-*bilinearen Raum*. Spielt der zugrunde liegende Vektorraum in unserer Betrachtung keine Rolle, so schreiben wir auch nur $\beta$ anstatt $(V, \beta)$. Ist $\beta$ nicht ausgeartet (wir sagen auch *regulär*), so nennen wir $(V, \beta)$ einen *nicht ausgearteten bilinearen Raum* (oder einen *regulären bilinearen Raum*). Wir definieren

$$\dim_K(V, \beta) = \dim_K \beta := \dim_K V$$

Ist $(V', \beta')$ ein weiterer $K$-bilinearer Raum, so heißen $(V, \beta)$ und $(V', \beta')$ (bzw. $\beta$ und $\beta'$) *isometrisch*

$$(V, \beta) \sim (V', \beta') \quad \big(\text{bzw.} \quad \beta \sim \beta'\big)$$

wenn es einen Isomorphismus $\Phi\colon V \to V'$ gibt, so dass

$$\beta'(\Phi(v), \Phi(w)) = \beta(v, w) \quad \text{für alle } v, w \in V$$

Offensichtlich ist die Isometrie von bilinearen Räumen (bzw. Bilinearformen) eine Äquivalenzrelation.

Seien $(V, \beta)$ und $(V', \beta')$ zwei $K$-bilineare Räume, dann können wir auf folgende Weise eine bilineare Abbildung auf $V \oplus V'$ definieren:

$$\beta \perp \beta'\big((v, v'), (w, w')\big) := \beta(v, w) + \beta'(v', w') \quad \text{für } v, w \in V v', w' \in V'$$

Den daraus resultierenden bilinearen Raum werden wir mit

$$(V \perp V', \beta \perp \beta')$$

bezeichnen.

**Bemerkung 5.3.1.** (Der Witt'sche Kürzungssatz) Seien $\beta_1, \beta_1', \beta_2$ und $\beta_2'$ $K$-bilineare Räume. Gilt dann

$$\beta_1 \perp \beta_2 \sim \beta_1' \perp \beta_2' \quad \text{und} \quad \beta_1 \sim \beta_1'$$

so ist

$$\beta_2 \sim \beta_2'$$

Sei $\mathrm{Bil}_{reg}(K)$ die Menge aller regulären $K$-bilinearen Räume. Wir werden weiter auf der Menge der regulären $K$-bilinearen Räume eine Semiringstruktur definieren. Wir haben mit '$\perp$' schon eine Verknüpfung auf $\mathrm{Bil}_{reg}(K)$ kennengelernt. Nun werden wir eine weitere erklären. Wir wissen schon aus Abschnitt 3.1, dass wir zwei regulären symmetrischen Bilinearformen

$$\beta_1\colon V_1 \times V_1 \longrightarrow K \quad \text{und} \quad \beta_2\colon V_2 \times V_2 \longrightarrow K$$

eine reguläre symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} \beta_1 \otimes \beta_2\colon V_1 \otimes V_2 \times V_1 \otimes V_2 &\longrightarrow K \\ \beta_1 \otimes \beta_2(v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2) &\mapsto \beta_1(v_1, w_1)\beta_2(v_2, w_2) \end{aligned}$$

für $v_1, w_1 \in V_1$ und $v_2, w_2 \in V_2$, zuordnen können.

**Bemerkung 5.3.2.** Seien $\beta_1, \beta_1', \beta_2$ und $\beta_2'$ reguläre $K$-bilineare Räume. Dann folgt aus

$$\beta_1 \sim \beta_1' \quad \text{und} \quad \beta_2 \sim \beta_2'$$

dass

$$\beta_1 \otimes \beta_2 \sim \beta_1' \otimes \beta_2' \quad \text{und} \quad \beta_1 \perp \beta_2 \sim \beta_1' \perp \beta_2'$$

Beide Verknüpfungen sind offensichtlich assoziativ und kommutativ, sie erfüllen das Distributivgesetz, und wir haben zwei neutrale Elemente, zum einen den Nullraum bzgl. '$\perp$', und zum anderen $\langle 1\rangle$ bzgl. '$\otimes$'. Damit ist $\mathrm{Bil}_{reg}(K)$ ein Semiring. Da beide Verknüpfungen vorhandene Isometrien respektieren, setzt sich diese Semiringstruktur auch auf die Isometrieklassen fort. Nach dem Witt'schen Kürzungssatz genügen beide Semiringe der Kürzungseigenschaft.

Von nun an werden wir nur noch Isometrieklassen von regulären symmetrischen Bilinearformen betrachten. Sei $\beta$ eine reguläre symmetrische Bilinearform, dann bezeichnen wir mit $[\beta]$ ihre Isometrieklasse. Die Menge der Isometrieklassen regulärer symmetrischer Bilinearformen über $K$ werden wir mit $\overline{\mathrm{Bil}}(K)$ bezeichnen. Wir werden oftmals auf den Isometrieklassen rechnen, ohne es explizit zu erwähnen. Den Grothendieck-Ring von $\overline{\mathrm{Bil}}(K)$ (bzgl. '$\perp$') werden wir mit

$$GW(K)$$

bezeichnen und *Grothendieck-Witt-Ring* über $K$ nennen. Man beachte, dass aufgrund des Witt'schen Kürzungssatzes die Abbildung einer Isometrieklasse in den Grothendieck-Witt-Ring injektiv ist. Wir führen keine neue Notation für Elemente aus dem Grothendieck-Witt-Ring ein und werden die Elemente weiterhin mit $[\beta]$ bezeichnen. Wenn wir Differenzen von Bilinearformen hinschreiben, so meinen wir damit ihre Differenz im Grothendieck-Witt-Ring.

(Vgl. für diesen Abschnitt die ersten Kapitel aus [11].)

5.4. **Eine Erweiterung der Norm auf bilineare Abbildungen.** Sei $A$ eine $R$-Algebra und $0 \leq k \leq d$. Wir haben uns schon überlegt, dass wir $S_dA$ als einen Unterring von $S_{k,d-k}A$ auffassen können, und definieren dazu den entsprechenden Homomorphismus

$$\iota_k \colon S_dA \longrightarrow S_{k,d-k}A$$

Sei $\alpha_{(d,l)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathcal{P}_{(r,l)}$ und $k \leq \alpha_1$. Dann ist

$$\alpha^k := (k, \alpha_1 - k, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) \in \mathcal{P}_{(d,l+1)}$$

und $\iota_k$ induziert wie folgt einen Homomorphismus auf $\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}A$:

$$\begin{array}{cccc} \widehat{\iota}_k\colon & \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}A & \longrightarrow & \mathcal{C}_{\alpha^k}A \\ & \| & & \| \\ & S_{\alpha_{(d,l)}}A \otimes_{S_dA} R & \xrightarrow{\iota_k \otimes id_R} & S_{\alpha^k}A \otimes_{S_dA} R \end{array}$$

Sei nun $A$ frei vom Rang $d$, und seien $V_1, \ldots, V_l$ freie $A$-Moduln von endlichem Rang. Wir erinnern uns an $S_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \ldots, V_l|R)$ und definieren

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \ldots, V_l|R) := S_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \ldots, V_l|R) \otimes_{S_{\alpha_{(d,l)}}A} \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}A$$

**Lemma 5.4.1.** *Sei $W$ ein weiterer $A$-Modul von endlichem Rang. Dann gilt:*

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(W \oplus V_1, V_2, \ldots, V_l) \simeq \bigoplus_{k=0}^{d} \mathcal{C}_{\alpha^k}(W, V_1, \ldots, V_l)$$

*Beweis.* Aus Satz 2.4.8 wissen wir, dass

$$S_{\alpha_1}(W \oplus V_1) \simeq \bigoplus_{k=0}^{\alpha_1}(S_kW \otimes S_{\alpha_1-k}V_1)$$

bzw., dass

$$S_{\alpha_{(d,l)}}(W \oplus V_1, V_2, \ldots, V_l) = \bigoplus_{k=0}^{\alpha_1} S_{\alpha^k}(W, V_1, V_2, \ldots, V_l)$$

Außerdem ist

$$S_{\alpha^k}A \otimes_{S_{\alpha_{(d,l)}}A} \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}A = S_{\alpha^k}A \otimes_{S_d A} R = \mathcal{C}_{\alpha^k}A$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(W \oplus V_1, V_2, \ldots, V_l) \\
\simeq\ & \bigoplus_{k=0}^{\alpha_1} S_{\alpha^k}(W, V_1, \ldots, V_l) \otimes_{S_{\alpha_{(d,l)}}A} \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}A \\
\simeq\ & \bigoplus_{k=0}^{\alpha_1} S_{\alpha^k}(W, V_1, \ldots, V_l) \otimes_{S_{\alpha^k}A} S_{\alpha^k}A \otimes_{S_{\alpha_{(d,l)}}A} \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}A \\
=\ & \bigoplus_{k=0}^{\alpha_1} S_{\alpha^k}(W, V_1, \ldots, V_l) \otimes_{S_{\alpha^k A}} \mathcal{C}_{\alpha^k}A \\
=\ & \bigoplus_{k=0}^{\alpha_1} \mathcal{C}_{\alpha^k}(W, V_1, \ldots, V_l)
\end{aligned}$$

□

Wir werden nun dieses Ergebnis auf Bilinearformen übertragen. Dazu müssen wir zunächst folgende bilineare Abbildung erklären:

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(\beta_1, \ldots, \beta_l)$$

Seien für $1 \leq i \leq l$ die Abbildungen $\beta_i \colon V_i \times V_i \longrightarrow A$ Bilinearformen. Wir haben schon gesehen, dass wir zu jeder dieser Bilinearformen eine bilineare Abbildung

$$S_{\alpha_i}(\beta_i) \colon S_{\alpha_i}V_i \times S_{\alpha_i}V_i \longrightarrow S_{\alpha_i}A$$

bekommen. Wir definieren

$$S_{\alpha_{(d,l)}}(\beta_1, \ldots, \beta_l) \colon S_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \ldots, V_l) \times S_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \ldots, V_l) \longrightarrow S_{\alpha_{(d,l)}}A$$

komponentenweise auf den einzelnen $S_{\alpha_i}V_i$ für $1 \leq i \leq l$.

Des Weiteren definieren wir

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(\beta_1, \ldots, \beta_l) \colon \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \ldots, V_l) \times \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \ldots, V_l) \longrightarrow \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}A$$

analog zu den $A$-Moduln durch

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(\beta_1, \ldots, \beta_l) = \big(S_{\alpha_{(d,l)}}(\beta_1, \ldots, \beta_l)\big)_{\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}A}$$

Dabei nutzen wir die natürliche $S_{\alpha_{(d,l)}}A$-Modulstruktur von $\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}A$ aus. Wir können $\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(\beta_1, \ldots, \beta_l)$ auch als eine $R$-Bilinearform ansehen, denn per Definition ist $\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}A \simeq R$. Offensichtlich ist $\mathcal{C}_d(\beta_1) = \mathcal{N}(\beta_1)$.

Wir werden für den Rest dieses Abschnittes die Moduln

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(V_1, \ldots, V_l) \quad \text{und} \quad \bigoplus_{E_1 \in \mathcal{E}_1} \cdots \bigoplus_{E_l \in \mathcal{E}_l} E_1 V_1^{\otimes \alpha_1} \otimes \ldots \otimes E_l V_l^{\otimes \alpha_l}$$

über die Isomorphie aus Satz 5.1.7 miteinander identifizieren.

**Bemerkung 5.4.2.** Die meisten Eigenschaften, die wir vorhin schon für die Norm von Bilinearformen nachgerechnet haben, bleiben auch in dieser Konstruktion erhalten.

(1) Für $i = 1, \ldots, l$ seien $\beta_i' \colon V_i' \times V_i' \longrightarrow A$ weitere $A$-Bilinearformen auf freien $A$-Moduln $V_i'$ von endlichem Rang, dann faktorisiert

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(\beta_1, \ldots, \beta_l) \otimes \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(\beta_1', \ldots, \beta_l') \quad \text{über} \quad \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(\beta_1 \otimes \beta_1', \ldots, \beta_l \otimes \beta_l')$$

(Wenn $A = \Pi^d R$ oder wenn $A$ eine separable $K$-Algebra ist, sind die beiden Abbildungen sogar bis auf Isomorphie gleich.)

(2) Ist $B$ eine weitere $R$-Algebra, dann ist unter der Isomorphie aus Bemerkung 5.1.6

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(\beta_1, \dots, \beta_l)_B = \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}\big((\beta_1)_B, \dots, (\beta_l)_B\big)$$

Der folgende Satz ergibt sich schnell aus Satz 5.1.7:

**Satz 5.4.3.** *Sei $A = \Pi^d R$, $\alpha_{(d,l)} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathcal{P}_{(d,l)}$, seien $V_1, \dots, V_l$ freie $A$-Moduln von endlichem Rang, und seien für $i = 1, \dots, l$*

$$\beta_i \colon V_i \times V_i \longrightarrow A$$

*$A$-Bilinearformen. Dann gilt*

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(\beta_1, \dots, \beta_l) = \mathop{\perp}_{(E_1, \dots, E_l) \in \mathcal{E}} E_1\beta_1^{\otimes\alpha_1} \otimes \dots \otimes E_l\beta_l^{\otimes\alpha_l}$$

*wobei*

$$E_j\beta_j^{\otimes\alpha_j} := e_{i_{j1}}\beta_j \otimes \dots \otimes e_{i_{j\alpha_j}}\beta_j \quad \textit{mit } E_j = e_{i_{j1}} \dots e_{i_{j\alpha_j}}^{[1,\dots,1]}$$

*Beweis.* Man kann $\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(\beta_1, \dots, \beta_l)$ mit Hilfe der Formel aus Beispiel 3.5.5 ausrechnen. □

**Korollar 5.4.4.** *Wenn $A = \Pi^d R$ oder wenn $A$ eine separable $K$-Algebra ist, dann gilt:*

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(\beta_1, \dots, \beta_l)$$

*ist eine nicht ausgeartete $\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}$-Bilinearform (bzw. eine nicht ausgeartete $R$-Bilinearform), wenn die Abbildungen $\beta_1, \dots, \beta_l$ nicht ausgeartet sind.*

*Beweis.* Für $A = \Pi^d$ folgt dies direkt aus dem letzten Satz. Die vorangegangene Bemerkung 5.4.2 und der letzte Satz liefern uns die nötigen Mittel, damit wir die Behauptung im separablen Fall analog zu Satz 4.5.9 beweisen können. □

**Lemma 5.4.5.** *Sei $W$ ein weiterer freier $A$-Modul von endlichem Rang und*

$$\beta \colon W \times W \longrightarrow A$$

*eine weitere $A$-Bilinearform. Dann ist*

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(\beta \perp \beta_1, \dots, \beta_l) \quad \simeq \quad \mathop{\perp}\nolimits_{k=0}^{d} \mathcal{C}_{\alpha^k}(\beta, \beta_1, \dots, \beta_l)$$

*Beweis.* Dies ist eine leichte Folgerung aus Lemma 5.4.1. □

5.5. **Polynomiale Abbildungen.** In diesem Abschnitt werden wir den Begriff des Polynoms auf Halbgruppen erweitern. Er ist fast vollständig der Arbeit [10] von M. Rost entnommen. Vergleiche aber auch [3, Proposition 1.6] von S. Joukhovitski. Wir werden in diesem Abschnitt einige Ergebnisse benutzen, die wir uns bereits im ersten Kapitel erarbeitet haben. Man beachte, dass wir sie dort für multiplikative Gruppen formuliert haben, sie hier jedoch für additive Gruppen benutzen.

Sei $A$ eine Halbgruppe und $B$ eine abelsche Gruppe. Zu einer beliebigen Abbildung $f \colon A \longrightarrow B$ definieren wir

$$\Delta_x f \colon A \longrightarrow B \qquad \text{vermöge } \Delta_x f(y) = f(x+y) - f(y) \text{ für } y \in A$$

**Bemerkung 5.5.1.** Sei $\gamma \in \mathbb{Z}[A]$ und $f \colon A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Dann ist

$$\widehat{\Delta_x f} \colon \mathbb{Z}[A] \longrightarrow B \quad \text{mit } \widehat{\Delta_x f}(\gamma) = \widehat{f}\big((e_x - 1)\gamma\big)$$

*Beweis.* Sei $\gamma = \sum_{i=1}^{n} m_i e_{y_i} \in \mathbb{Z}[A]$.

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta_x f}(\gamma) &= \widehat{\Delta_x f}\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i e_{y_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_x f(y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i\, f(x+y_i) - \sum_{i=1}^{n} m_i\, f(y_i) \\
&= \widehat{f}\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i e_{x+y_i}\Big) - \widehat{f}\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i e_{y_i}\Big) \\
&= \widehat{f}(e_x\gamma) - \widehat{f}(\gamma) = \widehat{f}\big((e_x-1)\gamma\big)
\end{aligned}$$

□

Wir werden nun polynomiale Abbildungen auf Halbgruppen definieren:

(1) Wir nennen die Nullabbildung

$$p\colon A \longrightarrow B \quad \text{mit } p(x) = 0 \text{ für alle } x \in A$$

eine *polynomiale Abbildung vom Grad* $-1$.

(2) Für $n \geq 0$ nennen wir eine Abbildung $p\colon A \longrightarrow B$ eine *polynomiale Abbildung vom Grad* $\leq n$, wenn die Abbildung $\Delta_x p$ für alle $x \in A$ eine polynomiale Abbildung vom Grad $\leq n-1$ ist.

(3) Wir nennen eine Abbildung *polynomial*, wenn es ein $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ gibt, so dass sie eine polynomiale Abbildung vom Grad $\leq n$ ist

Mit $P_n(A,B)$ (bzw. $P(A,B)$) werden wir die polynomialen Abbildungen vom Grad $\leq n$ von $A$ nach $B$ (bzw. die polynomiale Abbildungen von $A$ nach $B$) bezeichnen. Offensichtlich sind die Halbgruppen-Homomorphismen von $A$ nach $B$ polynomialen Abbildungen vom Grad $\leq 1$.

Seien $p \in P_n(A,B)$, $q \in P_m(A,B)$ und $\gamma \in A$. Wir definieren

$$(p+q)(\gamma) := p(\gamma) + q(\gamma)$$

Man sieht sofort, dass $p+q$ eine polynomiale Abbildung vom Grad $\leq \max(n,m)$ ist. Damit ist $P_n(A,B)$ (bzw. $P(A,B)$) eine Gruppe.

Seien $R$, $S$ kommutative Ringe und $q\colon (R,+) \longrightarrow (S,+)$ eine polynomiale Abbildung. Dann nennen wir $q$ *multiplikativ*, wenn

(M1) $q(1) = 1$

(M2) $q(a\,b) = q(a)\,q(b)$ für alle $a, b \in R$

Sei $p\colon A \longrightarrow B$ eine polynomiale Abbildung. Wir werden nun polynomiale Abbildungen mit Hilfe von Gruppenkomplettierungen charakterisieren.

Erinnern wir uns an den Homomorphismus

$$\epsilon_A\colon \mathbb{Z}[A] \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad \text{vermöge } e_x \mapsto 1 \quad \text{für } x \in A$$

mit $\operatorname{Kern} \epsilon_A = I_A$.

**Bemerkung 5.5.2.** Für $n \geq -1$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\widehat{\Delta_x p}(I_A^n) = 0$ für alle $x \in A$

(2) $\widehat{p}(I_A^{n+1}) = 0$

*Beweis.* Diese Behauptung folgt, weil $I_A^{n+1} = I_A \cdot I_A^n$ ist und $I_A$ von den Elementen der Form $(e_x - 1) \in \mathbb{Z}[A]$ erzeugt wird, schnell aus der letzten Bemerkung. □

**Lemma 5.5.3.** *Eine Abbildung $p\colon A \longrightarrow B$ ist genau dann eine polynomiale Abbildung vom Grad $\leq n$, wenn*

$$\widehat{p}(I_A^{n+1}) = 0$$

*Beweis.* (durch Induktion nach $n$)
Induktionsanfang: $n = -1$
Offensichtlich ist $p\colon A \longrightarrow B$ genau dann polynomial vom Grad $-1$, wenn

$$\widehat{p}\colon \mathbb{Z}[A] \longrightarrow B$$

polynomial vom Grad $-1$ ist. Außerdem ist

$$I_A^0 = \mathbb{Z}[A]$$

Induktionsschritt: $n \longmapsto n+1$
$p$ ist eine polynomiale Abbildung vom Grad $\leq n+1$ genau dann, wenn für alle $x \in A$ die Abbildung $\Delta_x p$ eine polynomiale Abbildung vom Grad $\leq n$ ist. Dies ist nach der Induktionsvoraussetzung genau dann der Fall, wenn

$$\widehat{\Delta_x p}(I_A^n) = 0 \quad \text{für alle } x \in A$$

Nach Bemerkung 5.5.2 ist dies gleichbedeutend mit

$$\widehat{p}(I_A^{n+1}) = 0$$

□

Sei $\gamma \in \mathbb{Z}[A]$, dann bezeichnen wir mit $[\gamma]_n$ seine Restklasse in $\mathbb{Z}[A]/I_A^n$. Weiter sei $\delta \in I_A^{n+1}$ und $p \in P_n(A, B)$, dann erkennen wir anhand des letzten Lemmas

$$\widehat{p}(\gamma + \delta) = \widehat{p}(\gamma) + \widehat{p}(\delta) = \widehat{p}(\gamma)$$

Insbesondere ist die Abbildung

$$\mathbb{Z}[A]/I_A^{n+1} \longrightarrow B \qquad \text{vermöge } \gamma \longmapsto \widehat{p}(\gamma') \text{ für } \gamma \in \mathbb{Z}[A]$$

wohldefiniert.

Seien $f, g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[A]/I_A^{n+1}, B)$ und $\gamma \in \mathbb{Z}[A]/I_A^{n+1}$. Auch auf der Menge $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[A]/I_A^{n+1}, B)$ ist, vermöge $(f+g)(\gamma) = f(\gamma) + g(\gamma)$, eine Gruppenstruktur definiert.

**Korollar 5.5.4.** *Folgende Abbildung ist ein Gruppen-Isomorphismus:*

$$\begin{array}{rcl} P_n(A, B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[A]/I_A^{n+1}, B) \\ p & \mapsto & \big(\gamma \mod I_A^{n+1} \mapsto \widehat{p}(\gamma)\big) \end{array}$$

*Beweis.* Seien $p, q \in P_n(A, B)$. Nach Lemma 5.5.3 ist die Abbildung wohldefiniert. Die Abbildung ist ein Gruppen-Homomorphismus, denn

$$\begin{array}{rcl} p+q & \mapsto & \big(\gamma \mod I_A^{n+1} \mapsto \widehat{p+q}(\gamma)\big) \\ & & = \big(\gamma \mod I_A^{n+1} \mapsto \widehat{p}(\gamma)\big) + \big(\gamma \mod I_A^{n+1} \mapsto \widehat{q}(\gamma)\big) \end{array}$$

Seien $p, q \in P_n(A, B)$ mit

$$\widehat{p}(\gamma') = \widehat{q}(\gamma') \quad \text{für alle } \gamma' \in \mathbb{Z}[A]/I_A^{n+1}$$

so ist auch

$$p(x) = \widehat{p}(e_x) = \widehat{q}(e_x) = q(x) \quad \text{für alle } x \in A$$

Die Abbildung ist damit injektiv.

Ist andererseits $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[A]/I_A^{n+1}, B)$, so definiert

$$f'(\gamma) := f([\gamma]_n) \quad \text{für } \gamma \in \mathbb{Z}[A]$$

eine lineare Abbildung von $\mathbb{Z}[A]$ nach $B$ mit $f'(I_A^{n+1}) = 0$. Wir definieren

$$p_f\colon A \longrightarrow B \quad \text{vermöge } x \mapsto f'(e_x) \text{ für } x \in A$$

Es ist $\widehat{p_f} = f'$ und damit ist $p_f$ nach Lemma 5.5.3 eine polynomiale Abbildung vom Grad $\leq n$. Wir haben dadurch die Surjektivität bewiesen. □

Den folgenden Satz kann man auch als eine Verallgemeinerung von Bemerkung 1.1.1 ansehen (vgl. Lemma 5.5.7):

**Satz 5.5.5.** *Zu jeder polynomialen Abbildung $p\colon A \longrightarrow B$ gibt es eine eindeutig bestimmte polynomiale Abbildung*

$$\overline{p}\colon \overline{A} \longrightarrow B$$

*Ist $p$ vom Grad $\leq n$, so ist $\overline{p}$ vom Grad $\leq n$.*

*Beweis.* Für $x \in A$ ist $e_x - 1 \in I_A$ und somit $e_x \mod I_A^{n+1}$ invertierbar für $n \geq 0$. Insbesondere ist $A \subset \mathbb{Z}[A]$ eine multiplikative Teilmenge, und wir sehen

$$\mathbb{Z}[A]/I_A^{n+1} = A^{-1}\big(\mathbb{Z}[A]/I_A^{n+1}\big)$$

Nach Korollar 1.1.7 wissen wir, dass

$$A^{-1}\big(\mathbb{Z}[A]/I_A^{n+1}\big) \simeq (A^{-1}\mathbb{Z}[A])/(A^{-1}I_A^{n+1})$$

Außerdem haben wir in Unterabschnitt 1.1.5 gesehen, dass

$$A^{-1}\mathbb{Z}[A] \simeq \mathbb{Z}\big[\overline{A}\big] \qquad \text{und dass} \quad A^{-1}I_A^{n+1} \simeq I_{\overline{A}}^{n+1}$$

Damit ist

$$\mathbb{Z}[A]/I_A^{n+1} \simeq (A^{-1}\mathbb{Z}[A])/(A^{-1}I_A^{n+1}) \simeq \mathbb{Z}\big[\overline{A}\big]/I_{\overline{A}}^{n+1}$$

Unter dieser Isomorphie erhalten wir zu jeder polynomialen Abbildung $p$ genau eine polynomiale Abbildung $\overline{p}$.

Offensichtlich ist $\overline{p}\colon \overline{A} \longrightarrow B$ polynomial vom Grad $\leq n$, wenn $p\colon A \longrightarrow B$ polynomial vom Grad $\leq n$ ist. □

Wir werden diese Erweiterung nun explizit angeben:

**Bemerkung 5.5.6.** Für $n \geq -1$, $a, x \in A$ und $p\colon A \longrightarrow B$ polynomial vom Grad $n$ gilt:

$$\text{(1)} \qquad e_{[a,x]}(1-e_x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}e_{[a+kx,x]}$$

$$\text{(2)} \qquad \widehat{\overline{p}}\big(e_{[a,x]}(1-e_x)^{n+1}\big) = 0$$

*Beweis.* (1) Wir benutzen die Rechenregeln aus Bemerkung 1.1.10.

$$(1-e_x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k e_x^k = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k e_{kx}$$

Außerdem ist nach Bemerkung 1.1.10 und Satz 5.5.5

$$e_{[a,x]}e_{kx} = e_{[a+kx,x]}$$

Demnach gilt

$$e_{[a,x]}(1-e_x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k e_{[a+kx,x]}$$

(2) Da $(1-e_x)^{n+1} \in I_{\overline{A}}^{n+1}$ ist, ist auch $e_{[a,x]}(1-e_x)^{n+1} \in I_{\overline{A}}^{n+1}$. Damit folgt aus Lemma 5.5.3, dass

$$\widehat{\overline{p}}(e_{[a,x]}(1-e_x)^{n+1}) = 0$$

□

**Lemma 5.5.7.** $\overline{p}\colon \overline{A} \longrightarrow B$ *berechnet sich wie folgt:*

$$\overline{p}(a-x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1}p(a+kx) \qquad \textit{für } a-x \in \overline{A}$$

*Beweis.* Aus der letzten Bemerkung 5.5.6(1) ergibt sich unter Zuhilfenahme der Bemerkung 1.1.10, dass

$$\begin{aligned} e_{[a,x]}(1-e_x)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k e_{[a+kx,x]} \\ &= e_{[a,x]} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k e_{[a+kx,x]} \\ &= e_{[a,x]} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^{k+1} e_{a+kx} \end{aligned}$$

Nun ist nach Bemerkung 5.5.6(2)

$$0 = \widehat{\widehat{p}}\big(e_{[a,x]}(1-e_x)^{n+1}\big) = \widehat{\widehat{p}}\Big(e_{[a,x]} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^{k+1}e_{a+kx}\Big)$$

Also ist

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{p}}(e_{[a,x]}) &= \widehat{\widehat{p}}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k e_{a+kx}\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k\,\widehat{\widehat{p}}(e_{a+kx}) \end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. □

(Zu diesem Abschnitt vgl. die ersten beiden Abschnitte in [10].)

5.6. **Die Norm auf Bilinearformen als polynomiale Abbildung.** Ziel dieses letzten Abschnittes ist es, zu einer gegebenen separablen Körpererweiterung eine multiplikative Abbildung von dem Grothendieck-Witt-Ring der Körpererweiterung in den Grothendieck-Witt-Ring des Grundkörpers zu erklären und ihre Existenz zu beweisen. Sei dazu $K$ ein Körper mit $\operatorname{char} K \neq 2$.

Sei $L|K$ eine separable Körpererweiterung vom Grad $d$ und $\alpha_{(d,l)} \in \mathcal{P}_{\alpha_{(d,l)}}$. Für $1 \le i \le l$ seien $V_i$ $L$-Vektorräume endlicher Dimension und $\beta_i\colon V_i \times V_i \longrightarrow L$ Bilinearformen.

**Bemerkung 5.6.1.** Für $1 \le i \le l$ seien $\beta_i'\colon V_i' \times V_i' \longrightarrow L$ weitere Bilinearformen mit $\beta_i \sim \beta_i'$. Dann ist

$$\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(\beta_1,\ldots,\beta_l) \sim \mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(\beta_1',\ldots,\beta_l')$$

*Beweis.* $\mathcal{C}_{\alpha_{(d,l)}}(\beta_1,\ldots,\beta_l)$ wird aus den $\beta_i'$ durch Tensorprodukte und Grundringwechsel konstruiert. Diese beiden Operationen sind, wie wir in Abschnitt 5.3 bemerkt haben, mit der Isometrie verträglich. □

**Beispiel 5.6.2.** Seien $\beta\colon V \times V \longrightarrow L$ und $\beta'\colon W \times W \longrightarrow L$ isometrische Bilinearformen. Dann gilt insbesondere

$$\mathcal{N}_K^L(\beta) \sim \mathcal{N}_K^L(\beta')$$

**Lemma 5.6.3.** *Seien $\alpha_1,\ldots,\alpha_l > 0$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \Pi^l\overline{\mathrm{Bil}}(L) &\longrightarrow GW(K) \\ \textit{vermöge} \quad ([\beta_1],\ldots,[\beta_l]) &\longmapsto [C_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_l)}(\beta_1,\ldots,\beta_l)] \end{aligned}$$

*in $\beta_i$ polynomial vom Grad $\alpha_i$ für $1 \le i \le l$.*

*Beweis.* Korollar 5.4.4 und die letzte Bemerkung zeigen, dass die Abbildung wohldefiniert ist. Die Behauptung lässt sich mit einfachen Mitteln aus Lemma 5.4.5 ableiten. Man nehme ohne Einschränkung an, dass $i = 1$ ist und führe dann einen Induktionsbeweis nach $\alpha_1$. □

**Satz 5.6.4.** *Zu jeder separablen Körpererweiterung $L|K$ der Dimension $d$ gibt es eine eindeutige polynomiale Abbildung vom Grad $d$*

$$\mathcal{N}_K^L\colon GW(L) \longrightarrow GW(K) \qquad \textit{mit} \quad \mathcal{N}_K^L([\beta]) = [\mathcal{N}_K^L(\beta)]$$

*Diese ist multiplikativ, und es gilt*

$$\dim_K \mathcal{N}_K^L([\beta]) = (\dim_L[\beta])^d$$

*Beweis.* Genau wie bei den Moduln, ist $\mathcal{C}_d(\beta) = \mathcal{N}_K^L(\beta)$. Eine separable Körpererweiterung ist insbesondere eine separable $K$-Algebra, also können wir dem letzten Lemma entnehmen, dass die Abbildung

$$\overline{\mathrm{Bil}}(L) \longrightarrow GW(K) \qquad \text{vermöge} \quad \mathcal{N}_K^L([\beta]) = [\mathcal{N}_K^L(\beta)]$$

polynomial vom Grad $d$ ist. Folglich existiert nach Satz 5.5.5 eine eindeutige polynomiale Abbildung vom Grad $d$

$$\mathcal{N}_K^L\colon GW(L) \longrightarrow GW(K) \qquad \text{mit} \quad \mathcal{N}_K^L([\beta]) = [\mathcal{N}_K^L(\beta)]$$

In Abschnitt 5.3 haben wir gesehen, dass das Tensorprodukt auf den Isometrieklassen wohldefiniert ist, und nach Korollar 4.5.4 erhält die Norm $\mathcal{N}_K^L$ das Tensorprodukt von Bilinearformen. Also ist die Abbildung $\mathcal{N}_K^L$ multiplikativ.

Die Aussage über die Dimension von $\mathcal{N}_K^L([\beta])$ folgt aus Satz 4.4.2. □

## Literatur


[1] D. Ferrand, *Un Foncteur Norme*, Bull. Soc. Math. France **t. 128** (1998), 1-49.

[2] S. Garibaldi, *Cohomological Invariants in Galois Cohomology*, AMS University Lecture Series, Vol. 28, 2003.

[3] S. Joukhovitski, *K-Theory of the Weil Transfer Functor*, K-Theory, Special issues dedicated to Daniel Quillen on the occasion of his sixtieth birthday, Part I **20** (2000), no. 1, 1–21.

[4] I. Kersten, *Brauergruppen von Körpern*, Vieweg, 1990.

[5] J. Milnor / D. Husemoller, *Symmetric Bilinear Forms*, Springer, 1973.

[6] N. Roby, *Lois polynomes et lois formelles en theorie des modules*, Ann.scient.Ec.Norm.Sup. **t.80** (1963), 213–348.

[7] ———, *Lois polynomes multiplicatives universelle*, C.R.Acad.Sc.Paris **t.290** (1980), 869–871.

[8] M. Rost, *Scratches on multiplicative transfer*, private notes, 2001.

[9] ———, *A Pfister form invariant for etale algebras*, preprint, 2002, http://www.math.uni-bielefeld.de/˜rost/q-invariants.html.

[10] ———, *The multiplicative transfer for the Grothendieck-Witt ring*, preprint, 2003, http://www.math.uni-bielefeld.de/˜rost/q-invariants.html.

[11] W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian Forms*, Springer, 1985.

[12] G. Scheja / U. Storch, *Lehrbuch der Algebra, Teil 1*, Teubner, 1980.

[13] ———, *Lehrbuch der Algebra, Teil 2*, Teubner, 1988.