DURCH NORMENGRUPPEN DEFINIERTE BIRATIONALE INVARIANTEN

MARKUS ROST

Zusammenfassung — Es sei Z eine eigentliche Varietät über dem Körper k. Wir zeigen den folgenden Reinheitssatz: ist ein Element der Funktionenkörpers K einer glatten und eigentlichen Varietät X über k in jedem Punkt der Codimension 1 das Produkt von einer Einheit und von Normen aus Restklassenkörpern abgeschlossener Punkte von $Z_K = Z \times_k K$, so gilt dies in jedem Punkt von X. Im Fall $X = \mathbf{P}^n_k$ findet man sogar einer solche Darstellung mit einer Einheit aus k^*.

Invariants birationnels definis par des groupes de normes

Résumé — *Soit Z une variété propre sur un corps k, et soit X une variété intègre, propre et lisse sur k. Nous établissons le résultat de pureté suivant: un élément du corps des fonctions K de X qui, en tout point de codimension 1 de X, peut s'écrire comme produit d'une unité et de normes de corps résiduels en les points fermés de $Z_K = Z \times_k K$, à la même propriété en tout point de X. Lorsque X est l'espace projectif sur k, on peut trouver une telle représentation avec une unité globale.*

Birational invariants defined by norm groups

Abstract — *Let Z be a complete variety over k. We prove the following purity theorem: an element of the function field K of a proper smooth variety X over k, which for any point of X of codimension 1 can be written as a unit times a product of norms from the residue classfields of closed points of Z_K, has the same property with respect to any point of X. If $X = \mathbf{P}^n_k$, then one may find a global unit with this property.*

Version Française Abrégée — Soit Z une variété algébrique propre sur le corps k. Pour toute extension de corps K/k, nous définissons le groupe $N_Z(K) \subset K^*$ comme le sous-groupe du groupe multiplicatif K^* engendré par les groupes de normes $N_{\kappa(Q)/K}(\kappa(Q)^*)$, lorsque Q [de corps résiduel $\kappa(Q)$] parcourant les points fermés de la K-variété $Z_K = Z \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} K$.

Voici deux exemples typiques de tels groupes $N_Z(K)$. Si φ est une forme quadratique de Pfister [6] définie sur le corps k, et Z est la quadrique projective associée à φ, le groupe $N_Z(K)$ coïncide avec le sous-groupe $D_\varphi(K) \subset K^*$ formé des éléments non nuls représentés par φ sur K. Par ailleurs, si A est une k-algèbre centrale simple et Z est la k-variété de Brauer-Severi associée, le groupe $N_Z(K)$ coïncide avec le sous-groupe $\operatorname{Nrd}(A_K^*) \subset K^*$, image de la norme réduite sur les éléments inversibles de la K-algèbre simple centrale $A_K = A \otimes_k K$.

The text appeared as: C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 310 (1990), no. 4, 189–192.

Soit $N_Z^0(K) \subset \mathbf{Z}$ le sous-groupe engendré par les degrés $[\kappa(Q){:}K]$ des points fermés Q de Z_K. Si v est une valuation discrète de rang 1 de K, triviale sur k, et de corps résiduel κ, on a l'inclusion $v(N_Z(K)) \subset N_Z^0(\kappa)$ et v induit un homomorphisme

$$\bar{v}\colon K^*/N_Z(K) \to \mathbf{Z}/N_Z^0(\kappa).$$

Pour une k-schéma régulier intègre X de corps des fonctions $k(X)$, la formation du diviseur d'une fonction induit donc une application

$$\bar{d}\colon k(X)^*/N_Z(k(X)) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} \mathbf{Z}/N_Z^0(\kappa(x))$$

[ici x parcourt l'ensemble $X^{(1)}$ des points de codimension 1 de X, et $\kappa(x)$ est le corps résiduel en x].

Lorsque X est propre, nous montrons que le groupe $\Sigma_Z(X) = \operatorname{Ker}(\bar{d})$ ne dépend que du corps de fonctions de X. Plus précisément, $\Sigma_Z(X)$ est égal à $\cap_v \operatorname{Ker}(\bar{v})$ lorsque v parcourt les valuations discrètes de rang 1 de K qui sont triviales sur k. En outre, on a l'égalité $\Sigma_Z(X \times \mathbf{P}_k^n) = \Sigma_Z(X)$. Des cas particuliers de ces énoncés, qui permettent de montrer la non k-rationalité de certaines variétés, avaient été obtenus par Colliot-Thélène, Sansuc, Parimala et Sridharan ([1], [2], [3]).

Ces énoncés sont des conséquences du résultat principal: pour un anneau local R de X, le groupe $\Sigma_Z(\operatorname{Spec}(R))$ est engendré par R^*. Pour établir cela, nous suivons la démonstration de Quillen [5] de la conjecture de Gersten en K-théorie.

1. Einleitung

Es sei Z eine eigentliche Varietät über dem Körper k. Für jede Erweiterung K von k sei $N_Z(K) \subset K^*$ die von den Normengruppen $N_{\kappa(Q)/K}(\kappa(Q)^*)$ erzeugte Untergruppe, wobei Q hier alle abgeschlossenen Punkte von $Z_K = Z \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} K$ durchläuft. Als Beispiele für Z betrachte man die durch eine Pfisterform φ [6] definierte projektive Quadrik oder die zu einer einfachen zentralen Algebra A gehörende Brauer-Severi-Varietät; in diesen Fällen ist $N_Z(K) = D(\varphi_K)$, die Untergruppe der von φ über K dargestellten Zahlen aus K^* (vgl. hierzu [4]), bzw. es ist $N_Z(K) = \operatorname{Nrd}(A_K^*)$, die Gruppe der reduzierten Normen von Einheiten von $A_K = A \otimes_k K$.

Wir definieren allgemein

$$\tilde{\Sigma}_Z(K) = \cap_v [N_Z(K) \cdot U_v], \quad \Sigma_Z(K) = \tilde{\Sigma}_Z(K)/N_Z(K),$$

wobei v hier alle diskreten Bewertungen vom Rang 1 von K über k durchläuft und $U_v \subset K^*$ die Einheitengruppe von v bezeichnet. [Bei endlichen Erweiterungen K von k ist dabei $\tilde{\Sigma}_Z(K) = K^*$ zu verstehen]. Für ein reguläres integres Schema X über k mit Funktionenkörper $K = k(X)$ setzen wir

$$\tilde{\Sigma}_Z(X) = \cap_x [N_Z(K) \cdot U_x], \quad \Sigma_Z(X) = \tilde{\Sigma}_Z(X)/N_Z(K)$$

wobei x alle Punkte von X der Kodimension 1 durchläuft und U_x die Einheitengruppe der zu x gehörenden Bewertung v_x bezeichnet.

Ziel dieser Note ist der Beweis der folgenden Tatsachen:

I. *Ist $L = K(t)$ eine rationale Erweiterung von K, so ist die kanonische Abbildung $\Sigma_Z(K) \to \Sigma_Z(L)$ bijektiv.*

II. *Ist R ein lokaler Ring einer glatten Varietät X über k, so gilt*

$$\Sigma_Z(\operatorname{Spec} R) = [N_Z(K) \cdot R^*]/N_Z(K).$$

III. *Ist X eine eigentliche glatte Varietät über k mit Funktionenkörper K, so ist die kanonische Abbildung $\Sigma_Z(K) \to \Sigma_Z(X)$ bijektiv.*

Aus I. und III. ergibt sich, daß für eigentliche glatte Varietäten X die Gruppe $\Sigma_Z(X)$ eine stabil-birationale Invariante von X ist. Diese Tatsache wurde in Spezialfällen bereits von anderen Autoren bewiesen und dazu benutzt, die Nicht-Rationalität gewisser Körpererweiterungen $K|k$ nachzuweisen, vgl. [1], [2], [3].

Der Beweis von I. und II. $\Rightarrow$ III. benutzt Standardargumente der algebraischen Geometrie, im Beweis von II. folgen wir dem Beweis der Gersten-Vermutung in der K-Theorie von Quillen.

2. Die Divisorenabbildung für $N_Z(K)$

Für eine Varietät Y sei $Y_{(i)}$ bzw. $Y^{(i)}$ die Menge der Punkte der Dimension i, bzw. der Codimension i, und $\kappa(P)$ bezeichne den Restklassenkörper von $P \in Y$. Ist K eine Erweiterung von k, so definieren wir $N_Z^0(K) \subset \mathbf{Z}$ als die von allen Graden $[\kappa(Q){:}L]$ von abgeschlossenen Punkten $Q \in (Z_K)_{(0)}$ erzeugte Untergruppe. Ist v eine diskrete Bewertung von K über k mit Bewertungsring $\mathcal{O}_v$ und Restklassenkörper $\kappa(v)$, so gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{Q\in(Z_K)_{(0)}} \kappa(Q)^* & \xrightarrow{d} & \bigoplus_{Q\in(Z_{\kappa(v)})_{(0)}} \mathbf{Z} \\ \big\downarrow N & & \big\downarrow N^0 \\ K^* & \xrightarrow{v} & \mathbf{Z} \end{array}$$

wobei d hier durch die zykeltheoretische Divisorenabbildung

$$\bigoplus_{Q\in(Z_{\mathcal{O}_v})_{(1)}} \kappa(Q)^* \longrightarrow \bigoplus_{Q\in(Z_{\mathcal{O}_v})_{(0)}} \mathbf{Z}$$

induziert ist und N, N^0 die gewöhnlichen Normenabbildungen sind:

$$N((a_Q)_Q) = \Pi_Q N_{\kappa(Q)/K}(a_Q), \qquad N^0((n_Q)_Q) = \Sigma_Q[\kappa(Q){:}\kappa(v)]n_Q.$$

Wegen $N_Z(K) = \operatorname{Bild} N$, $N_Z^0(\kappa(v)) = \operatorname{Bild} N^0$ ist also $v(N_Z(K)) \subset N_Z^0(\kappa(v))$.

Für ein integres und reguläres Schema Y über k mit Funktionenkörper K induziert somit die Divisorenabbildung $d = (v_y)_{y\in Y^{(1)}}$ einen Homomorphismus

$$d_Z\colon N_Z(K) \to \bigoplus_{y\in Y^{(1)}} N_Z^0(\kappa(y)).$$

Es gilt nun folgender

Satz. *Ist $Y = \mathbf{A}^1_k$ oder $Y = \operatorname{Spec} R$ das Spektrum eines lokalen Ringes einer glatten Varietät X über k, so ist d_Z surjektiv.*

Wir zeigen zunächst, daß dieser Satz die oben aufgestellten Behauptungen impliziert. Zum Beweis von II. sei $b \in \tilde{\Sigma}(\operatorname{Spec} R)$. Es ist dann $v_y(b) \in N_Z^0(\kappa(y))$ für alle $y \in (\operatorname{Spec} R)^{(1)}$ und daher ist $y \in N_Z(K) \cdot R^*$ nach dem Satz. Zum Beweis von I. überlegt man sich zuerst auf ähnliche Weise $\tilde{\Sigma}_Z(\mathbf{A}^1_k) = N_Z(K) \cdot k^*$ mit Hilfe des Satzes. Wendet man dies auf die Varietät Z_K über K an und betrachtet die Inklusionen [mit $L = K(\mathbf{A}^1)$]

$$\tilde{\Sigma}_Z(K) \subset \tilde{\Sigma}_Z(L) \subset \tilde{\Sigma}_{Z_K}(L) \subset \tilde{\Sigma}_{Z_K}(\mathbf{A}^1_K) = N_Z(L) \cdot K^*,$$

so erhält man, daß $\Sigma_Z(K) \to \Sigma_Z(L)$ surjektiv ist; die Injektivität, d. h.

$$N_Z(L) \cap K^* = N_Z(K)$$

erhält man durch Spezialisierung. Zum Beweis von III. sei v eine diskrete Bewertung von K. Weil X eigentlich ist, dominiert $\mathcal{O}_v$ einen lokalen Ring R von X, $R \subset \mathcal{O}_v$. Ferner ist $\tilde{\Sigma}(X) \subset \tilde{\Sigma}(\operatorname{Spec} R)$ und II. zeigt $\tilde{\Sigma}(\operatorname{Spec} R) \subset \tilde{\Sigma}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_v)$. Also folgt

$$\tilde{\Sigma}(X) \subset \cap_v \tilde{\Sigma}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_v) = \tilde{\Sigma}(K).$$

3. Beweis des Satzes

Wir verwenden das Normenprinzip. Für jeden Punkt $y \in Y^{(1)}$ ist $N_Z^0(\kappa(y)) \subset d_Z(N_Z(K))$ zu zeigen.

Im Fall $Y = \mathbf{A}_k^1 = \operatorname{Spec} k[t]$, $K = k(t)$ ist die kanonische Liftung von y nach $Y_{\kappa(y)}$ durch einen Parameter $\alpha = t - t_y$, $t_y \in \kappa(y)$ gegeben. Ist nun Q ein abgeschlossener Punkt von $Z_{\kappa(y)}$ und $L = K \otimes_k \kappa(Q)$, so definiert Q einen Punkt in Z_K mit Restklassenkörper L und daher ist $N_{L/K}(\alpha) \in N_Z(K)$. Andererseits ist $N_{L/K}(\alpha) \in k[t]$ ein Polynom, das nur in y verschwindet und zwar von der Ordnung $[\kappa(Q){:}\kappa(y)]$. Da Q beliebig war, folgt die Behauptung aus der Definition von $N_Z^0(\kappa(y))$.

Im zweiten Fall folgen wir [5] (§7; Lemma 5.12 auf S. 133 + folgende Zeilen). Es sei $R = \mathcal{O}_{X,x}$ und $W \subset X$ das zu y gehörende abgeschlossene Unterschema. Nach Verkleinern von X kann man annehmen, daß X affin ist und daß W durch einen globalen Parameter definiert ist. Es gibt dann einen in x glatten Morphismus $X \to U$ (mit $U = \mathbf{A}_k^{n-1}$, $n = \dim X$), so daß W über U endlich ist. Es sei y' das Bild von y unter der kanonischen (Diagonal-) Abbildung $W \to X' = X \times_U W$; ferner sei $\pi \colon X' \to X$ die Projektion. Wegen der Glattheit von X' über W in den (endlich vielen) Punkten von $\pi^{-1}(x)$, wird der Zykel y' lokal um $\pi^{-1}(x)$ durch einen Parameter α definiert. Mit $K' = K \otimes_{k(U)} \kappa(y)$ ist dann $N_{K'/K}(\alpha) = \pi_*(\alpha)$ lokal um x ein Parameter für $y = \pi_*(y')$. Für einen abgeschlossenen Punkt Q von $Z_{\kappa(y)}$ erhält man nun wie oben mit $N_{L/K}(\alpha)$ ($L = K \otimes_{k(U)} \kappa(Q)$) ein Element aus $N_Z(K)$ mit Divisor $[\kappa(Q){:}\kappa(y)] \cdot y$ bzgl. $\operatorname{Spec} R$. □

Literatur

[1] J.-L. Colliot-Thélène, Formes quadratiques multiplicatives et variétés algébriques, *Bull. Soc. math. France*, 106, 1978, S. 113–151; deux compléments, *ibid.*, 108, 1980, S. 213–227.

[2] J.-L. Colliot-Thélène und J.-J. Sansuc, Fibrés quadratiques et composantes connexes réelles, *Math. Ann.*, 244, 1979, S. 105–134.

[3] J.-L. Colliot-Thélène, R. Parimala und R. Sridharan, Un théorème de pureté locale, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 309, Reihe I, 1989, S. 857–862.

[4] M. Knebusch, Ein Satz über die Werte von quadratischen Formen über Körpern, *Inventiones math.*, 12, 1971, S. 300–303

[5] D. Quillen, Higher algebraic K-theory, I. *Algebraic K-theory*, I, Proc. Conf. Seattle 1972, *Lecture Notes in Math.* Nr. 341, Springer-Verlag, 1973, S. 85–147.

[6] W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian Forms*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 270, Springer-Verlag, 1985.

NWF I - Mathematik, Universität Regensburg, D-93040 Regensburg, Germany

E-mail address: `markus.rost@mathematik.uni-regensburg.de`

URL: `http://www.physik.uni-regensburg.de/~rom03516`