Algèbres de Lie de dimension infinie et théorie de la descente

Wilhelm Alexander Steinmetz-Zikesch

Table des matières

1 Introduction **5**
1.1 Résultat principal . . . 5
1.2 Algèbres de Lie de dimension infinie . . . 6
1.3 Structure de ce travail . . . 7
1.4 Conventions et notations . . . 8

2 Généralités et préliminaires **9**
2.1 Géométrie algébrique et modules . . . 9
2.2 Algèbres d'Azumaya et groupe de Brauer . . . 10
2.3 Formes hermitiennes . . . 12
2.3.1 Involutions et formes hermitiennes . . . 12
2.3.2 Comparaison de catégories de formes hermitiennes . . . 13
2.3.3 Groupe de Witt . . . 15
2.3.4 Théorèmes de simplification . . . 15
2.4 Involutions sur les algèbres d'Azumaya . . . 16

3 Les conjectures **25**
3.1 Classes de lacets . . . 26
3.1.1 L'indice de Witt-Tits et l'invariant de Brauer . . . 27
3.2 Formes d'algèbres sur des anneaux de polynômes de Laurent . . . 28
3.2.1 Algèbres de multi-lacets . . . 28
3.2.2 Le cas des algèbres de Lie . . . 28
3.3 Les conjectures . . . 29

4 Le cas $^1A_{n-1}$ et les groupes orthogonaux **31**
4.1 Le cas $^1A_{n-1}$ . . . 31
4.2 Le cas des groupes orthogonaux . . . 36

5 Les autres groupes classiques **41**
5.1 Conventions, notations et préliminaires . . . 41
5.2 La suite spectrale de S. Gille I . . . 43
5.2.1 Groupes de Witt cohérents . . . 43
5.2.2 Comparaison avec groupes de Witt usuels . . . 44
5.2.3 Construction de la suite spectrale . . . 45
5.2.4 La suite spectrale et l'équivalence de Morita . . . 47
5.3 La suite spectrale de S. Gille II . . . 48
5.3.1 Groupes de Witt cohérents . . . 48
5.3.2 Comparaison avec groupes de Witt usuels . . . 49

5.3.3 Construction de la suite spectrale 50
5.4 Le cas C_n 51
5.5 Les autres groupes du type D_n 58
5.6 Le cas ${}^2A_{n-1}$ 69

6 La conjecture B **75**

A Un théorème de compatibilité **83**
A.1 Énoncé du théorème 85
A.2 L'existence du foncteur de Morita F 88
A.3 Le cas général 91
A.3.1 Le foncteur de dévissage u_* 91
A.3.2 Compatibilité des foncteurs F et u_* 93

Chapitre 1

Introduction

1.1 Résultat principal

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, par exemple $k = \mathbb{C}$. Soit $R_2 = k[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ l'anneau de polynômes de Laurent sur k. Ce travail porte sur la classification des torseurs sous les groupes algébriques classiques (i.e. les groupes de types A_{n-1} et B_n $(n \geq 2)$, C_n $(n \geq 3)$ et D_n $(n \geq 4)$ sauf ${}^{3,6}D_4$). Fixons une famille compatible de racines n-ièmes de l'unité primitives $(\zeta_n)_{n\geq 1}$, i.e. pour tout $l \geq 1$, $\zeta_{ln}^l = \zeta_n$. Notons $A(s,t)$ $(s,t \geq 1)$ la R_2-algèbre d'Azumaya définie par les relations

$$X^t = t_1, \;\; Y^t = t_2^s \quad \text{et} \quad XY = \zeta_n YX.$$

Disons que le R_2-schéma en groupes semi-simples simplement connexe $\mathbf{G}$ satisfait à la condition (*), si $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_1(A(s,t))$ avec pgcd $(s,t) > 2$.
Alors le théorème principal de ce travail est le suivant :

Théorème 1.1. *Soit $\mathbf{G}$ un R_2-schéma en groupes semi-simples simplement connexe de type :*

1. ${}^1A_{n-1}$ *satisfaisant à (*)*
2. ${}^2A_{n-1}$ $(n \geq 7)$
3. C_n $(n \geq 6)$
4. ${}^{1,2}D_n$ $(n \geq 8)$

alors $H^1_{ét}(R_2, \mathbf{G}) = 1$ où ét est la topologie étale sur R_2.

Remarque 1.2. *Pour $\mathbf{G} = \mathbf{Spin}(q)$, où q est une R_2-forme quadratique de rang ≥ 5, on a également $H^1(R_2, \mathbf{G}) = 1$. La trivialité de cet ensemble découle d'un travail de Parimala [Pa], voir [GP1, Cor. 6.3]. On a donc $H^1(R_2, \mathbf{G}) = 1$ également pour $\mathbf{G}$ de type B_n $(n \geq 2)$ et pour certains $\mathbf{G}$ de type ${}^{1,2}D_n$ $(n \geq 4)$.*

L'ensemble $H^1_{ét}(R_2, \mathbf{G})$ classifie les torseurs ou espaces principaux homogènes sous le R_2-schéma en groupes $\mathbf{G}$ (voir [Gir, III] ou [Mi, III.4] et le début du chapitre 2). Observons l'analogie de ce théorème avec la conjecture II de Serre [Se, Conjecture II] :

Conjecture II. *Soit F un corps parfait de dimension cohomologique 2 et soit $\mathbf{G}$ un F-schéma en groupes semi-simples simplement connexe, alors $H^1_{\acute{e}t}(F, \mathbf{G}) = 1$.*

Le corps de fractions $K := k(t_1, t_2)$ de R_2 est de dimension cohomologique 2. Par un théorème de de Jong [dJ] l'indice et l'exposant dans le groupe de Brauer coïncident sur K. Il suit qu'en utilisant ce théorème, par [CTGP, théorèmes 1.3 et 2.1] – pour le cas où $\mathbf{G}$ est sans facteur de type E_8 – et par [GP1, Thm. 2.5] – pour le cas où $\mathbf{G}$ contient un tel facteur – la conjecture II est vraie pour $F = K$. On peut alors voir le théorème 1.1 comme une variante "globale" de cette conjecture pour K. Notons qu'il y a une obstruction à ce que la conjecture II soit vraie pour l'anneau R_2 pour groupes de tous les types : L'ensemble $H^1_{\acute{e}t}(R_2, \mathbf{SL}_1(A(1, n)))$ n'est trivial pour aucun $n > 1$ (voir [GP1, Prop. 3.20 et Rem. 3.23] et chapitre 3.3). Par contre il y a l'espoir que les autres bornes puissent être améliorées : la trivialité de $H^1_{\acute{e}t}(R_2, \mathbf{SL}_1(A(s, t)))$ pour pgcd $(s, t) = 2$, et de $H^1_{\acute{e}t}(R_2, \mathbf{G})$ pour $\mathbf{G}$ de type ${}^2A_{n-1}$ (avec $2 \leq n \leq 6$), C_n (avec $3 \leq n \leq 5$) et ${}^{1,2}D_n$ (avec $4 \leq n \leq 7$, et $\mathbf{G}$ n'étant pas le groupe des spineurs d'une R_2-forme quadratique) reste une conjecture (cf. [GP1, Conjecture 6.1] et chapitre 3.3).

1.2 Algèbres de Lie de dimension infinie

À part la relation avec la conjecture II de Serre, les torseurs sur Spec R_2 ont une relation importante avec une certaine classe d'algèbres de Lie de dimension infinie sur $\mathbb{C}$, appelées *extended affine Lie algebras* (EALA's) (cf. section 3.3, [AABGP] et [Ne]). Pour préciser cette relation présentons le cas général pour les anneaux de polynômes de Laurent à m variables et introduisons la notion d'une *algèbre de multi-lacets.*

Soit donc $R_m = k[t_1^{\pm 1}, ..., t_m^{\pm 1}]$. Fixons $(\zeta_n)_{(n \geq 1)}$ une famille compatible de n-racines de l'unité ($\zeta_{ln}^l = \zeta_n$). Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie simple, de dimension infinie. Soit $\mathbf{G} = \mathbf{Aut}_k(\mathfrak{g})$ son groupe de k-automorphismes. Notons également par $\mathbf{G}$ le groupe de R_m-automorphismes de la R_m-algèbre $\mathfrak{g} \otimes_k R_m$. Étant donnée une famille $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_m)$ d'automorphismes d'ordre fini de la k-algèbre $\mathfrak{g}$ qui commutent, on peut construire une k-algèbre $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma)$, dite *algèbre de multi-lacets* associée à cette donnée (voir section 3.2.1 et [GP1, 5.1]). Cette k-algèbre est de dimension finie vue comme R_m-algèbre, et en fait, elle est une R_m-forme de $\mathfrak{g}$[1]. Il suit que l'on peut lui attacher un torseur qui définie une classe dans l'ensemble de cohomologie $H^1(R_m, \mathbf{G})$ (si $\mathbf{G}$ est un k-groupe semi-simple[2], cette classe correspond à des *torseurs de lacets* (ou *loops torsors* en anglais) comme ils ont été définis et étudiés dans [GP1, section 3], voir aussi 3.1). Le formalisme général d'espaces principaux homogènes (ou torseurs) sur des schémas permet alors d'étudier ces algèbres de multi-lacets à l'aide de cet ensemble de cohomologie.

Ensuite, ces algèbres de multi-lacets ont l'anneau R_m comme centroïde ; l'interêt de ces algèbres provient donc du théorème principal de [ABFP], qui montre que des *centre-less cores* (*loc.cit.*) des EALA, qui sont des modules de dimension finie sur leur centroïdes, sont toujours des algèbres de multilacets.

[1]Strictement, elle est une R_m-forme de $\mathfrak{g} \otimes_k R_m$, mais ce petit abus de notation sera utilisé tout au long de ce travail.

[2]dans le sens de Borel [Bo].

Pour $m = 1, 2$, les algèbres de multi-lacets ont déjà fait l'objet de plusieurs études :

Dans le cas $m = 1$, la classification des torseurs sur $R_1 = k[t^{\pm 1}]$ a été faite dans [Pi]. Tous les torseurs correspondent à des algèbres de multi-lacets. Celles-ci sont toutes des *centre-less cores* de EALA, et ces dernières sont des algèbres de Kac-Moody affines.

Le cas $m = 2$ a déjà été étudié dans [GP1] et [GP2]. Si $\mathbf{G}$ est un R_2-groupe semi-simple[3], Gille et Pianzola ont entièrement décrit la classe des torseurs de lacets sur R_2 (i.e. les classes dans $H^1(R_2, \mathbf{G})$, qui correspondent aux algèbre de multi-lacets). Ils ont d'ailleurs conjecturé que si le schéma en groupes $\mathbf{G}$ (pas forcément semi-simple) est rationnellement isotrope (i.e. isotrope sur $K = \mathrm{Frac}(R_2) = k(t_1, t_2)$, voir section 4.1) alors tous les torseurs sous $\mathbf{G}$ correspondent à des algèbres de multi-lacets. Le théorème 1.1 montre que, en rang assez grand, ceci est le cas pour tous les groupes classiques. Gille et Pianzola ont observé que le cas où $\mathbf{G} = \mathbf{Spin}(q)$, avec q une R_2-forme quadratique de rang ≥ 5, découle d'un travail de Parimala [Pa] sur les formes quadratiques sur les anneaux de Dedekind, voir la remarque 1.2.

En ce qui concerne les algèbres de multi-lacets, Gille et Pianzola ont conjecturé qu'ils sont, en dehors de type A, entièrement determinées (à k-isomorphisme près) par leur indice de Witt-Tits, cf. [GP1, Conj. 6.4]. Dans le chapitre 6 du présent travail, on déduit du théorème 1.1, que cette conjecture est en fait vraie en dehors de type ${}^1A$, à savoir :

Corollaire 1.3. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple, de dimension finie sur k de type A_{n-1} ($n \geq 7$), B_n ($n \geq 2$), C_n ($n \geq 6$) ou D_n ($n \geq 8$). Notons $\mathbf{Aut}_k(\mathfrak{g})$ son groupe de k-automorphismes. Soient $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ deux paires d'automorphismes d'ordre fini de $\mathfrak{g}$ qui commutent, i.e. on a $x_1x_2 = x_2x_1$ et $y_1y_2 = y_2y_1$. Si $\mathfrak{g}$ est de type A_{n-1}, supposons de plus que les éléments x_1, x_2, y_1 et y_2 ne sont pas tous contenus dans la composante connexe de l'élément neutre de $\mathbf{Aut}_k(\mathfrak{g})$. Alors $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathbf{x}) \otimes_{R_2} K$ est une algèbre de Lie de dimension finie et isotrope sur K. De plus,*

$$\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathbf{x}) \simeq_{k-Lie} \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow I(\mathbf{x}) = I(\mathbf{y})$$

où $I(\mathbf{x})$ et $I(\mathbf{y})$ sont les indices de Witt-Tits de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ respectivement (voir section 3.1.1).

1.3 Structure de ce travail

La stratégie pour prouver le théorème 1.1 est analogue à celle de Bayer et Parimala dans [BFP] : on utilise la description (due à Weil [We] dans le cas d'un corps de base) des torseurs sous les groupes classiques sur R_2 en termes d'algèbres d'Azumaya pour les groupes de types ${}^1A_n$ et en termes d'algèbres d'Azumaya à involutions pour les autres groupes classiques, cf. [Kn, III.8.5]. Ensuite on calcule les groupes de Grothendieck des algèbres d'Azumaya sur R_2 et les groupes de Witt des formes hermitiennes et anti-hermitiennes sur des algèbres d'Azumaya à involutions sur R_2. Pour cela on utilise une suite spectrale

[3] ou plutôt $\mathbf{G}_{R_2}$.

de K-théorie de Panin et Suslin [PS] pour le cas ${}^1A_{n-1}$ et deux suites spectrales de Stefan Gille [Gil1] et [Gil2] pour les cas ${}^2A_{n-1}, C_n, D_n$. Enfin on utilise des théorèmes de scindage et de simplification de Knus et Bertuccioni [Kn] pour obtenir des résultats non stables qui portent sur les torseurs sur R_2.

Par rapport à la structure de ce travail, le chapitre 2 introduit des résultats sur les algèbres d'Azumaya, les formes quadratiques et hermitiennes et sur les algèbres à involutions dont on aura besoin par la suite. Le chapitre 3.3 explicite le lien avec les algèbres à multi-lacets et introduit les conjectures. Ensuite les chapitres 4 et 5 traitent de la preuve du théorème 1.1 pour les groupes des différents types. Le chapitre 6 est dédié à la demonstration du corollaire 1.3 et finalement l'appendice contient la preuve d'un théorème de compatibilité entre l'équivalence de Morita et une suite spectrale de groupes de Witt dont on aura besoin dans le chapitre 5.

1.4 Conventions et notations

Tous les anneaux et homomorphismes d'anneaux qui apparaissent sont dans la catégorie des anneaux avec un élément unité et tous les modules sont, sauf mention expresse du contraire, des modules à gauche. Pour un anneau R, la catégorie des R-modules à gauche est notée $R - \mathfrak{Mod}$ et quand il est clair dans le contexte qu'il s'agit de modules à gauche ou à droite, cette catégorie est notée $\mathcal{M}(R)$. On note M^r la somme directe de r copies du module M. Si R est un anneau, M un R-module et $R \longrightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux, on note $M_S = M \otimes_R S$ le S-module obtenu par extension d'anneaux. De même pour un homomorphisme $f : M \longrightarrow M'$ entre R-modules on note $f_S = f \otimes_R \mathrm{id}_S : M \otimes_R S \longrightarrow M \otimes_R S$ l'homomorphisme obtenu par extension d'anneaux. Si A est un anneau, on note par A^{op} l'anneau avec la multiplication opposée. On identifie toujours l'anneau $(A^{op})^{op}$ avec A. Toutes ces conventions se traduisent de manière analogue pour les catégories des faisceaux d'anneaux sur un schéma et les faisceaux de modules sur un tel faisceau d'anneaux. Tout au long de ce travail, A désigne un anneau, R désigne un anneau commutatif et k un corps commutatif. La catégorie des groupes abéliens est notée $\mathfrak{Ab}$.

Chapitre 2

Généralités et préliminaires

Ce chapitre expose des résultats sur des algèbres d'Azumaya, des formes quadratiques et hermitiennes et sur des algèbres à involutions dont on aura besoin dans ce travail. À part les généralités de géométrie algébrique et celles sur les algèbres d'Azumaya et le groupe de Brauer, qui sont évidémment en grande partie dues à Grothendieck, nos sources principales sont les livres [Kn] et [KMRT]. Dans [Kn], Knus donne une exposition de généralités sur des formes hermitiennes et quadratiques sur des anneaux, de théorèmes de comparaison de catégories de formes hermitiennes et d'une théorie de Morita pour les catégories de formes hermitiennes, que l'on réproduit dans ce chapitre. On tire de ce livre également des théorèmes de simplification pour des modules (du à Bass et Schanuel) et pour les formes hermitiennes (du à Bak). Le livre [KMRT] contient une étude détaillée de l'ensemble $H^1_{\acute{e}t}(k, \mathbf{G})$, pour $\mathbf{G}$ un k-groupe algèbrique linéaire semi-simple de type classique, en termes d'algèbres simples centrales à involutions. On étend ces descriptions à des ensembles $H^1_{\acute{e}t}(R, \mathbf{G})$ (où R désigne un anneau et $\mathbf{G}$ désigne un schéma en groupes algèbriques linéaires) sous certains condition sur R et $\mathbf{G}$.

2.1 Géométrie algébrique et modules

Soit X un schéma. Pour $x \in X$ on note $\mathcal{O}_x$ l'anneau local en x et $k(x)$ son corps résiduel. Supposons que le schéma X est affine, i.e. $X = \mathrm{Spec}\ R$ pour un anneau commutatif R. On note son espace topologique sous-jacent aussi Spec R, c'est l'ensemble des idéaux premiers de R muni de la topologie de Zariski. Le sous-ensemble des idéaux maximaux de R, muni de la topologie induite est noté Spm R. La dimension (combinatoire) (cf. [Kn, VI.2.2]) de l'espace topologique Spec R, noté dim Spec R, est aussi la dimension de Krull de l'anneau R. Pour un anneau noethérien, la dimension de l'espace Spm R n'excède pas la dimension de Spec R, cf. [Kn, VI.2.2].

Soit $\mathbf{G}$ un schéma en groupes commutatifs sur X. Soit E une topologie sur X (e.g. $E = \acute{e}t$ la topologie étale, $E = fppf$ la topologie fidèlement plate de présentation finie). Alors les groupes de cohomologie $H^i_E(X, \mathbf{G})$ correspondent à la cohomologie "foncteur dérivé" pour la topologie E et les ensembles $\check{H}^i_E(X, \mathbf{G})$ signifient la cohomologie de Čech pour la topologie E.

Dans le cas où $\mathbf{G}$ est un schéma en groupes non commutatifs sur X, les seuls ensembles de cohomologie qui existent sont les ensembles $\check{H}^i_E(X, \mathbf{G})$ $(i = 0, 1)$, c.f. [Gir, Ch. III].

Pour $\mathbf{G}$ commutatif, on a par [Mi, III.2.10] que $\check{H}^i_E(X, \mathbf{G}) \simeq H^i_E(X, \mathbf{G})$ pour $i = 0, 1$. Donc on va noter pour tout $\mathbf{G}$ les premiers ensembles de cohomologie $H^0_E(X, \mathbf{G})$ et $H^1_E(X, \mathbf{G})$ étant clair qu'il s'agit des ensembles de cohomologie de Čech si $\mathbf{G}$ est non commutatif.

De plus on a le résultat suivant de comparaison des topologies : soit $\mathbf{G}$ un schéma en groupes lisses sur X, alors $H^i_{\acute{e}t}(X, \mathbf{G}) \simeq H^i_{fppf}(X, \mathbf{G})$ $(i \geq 0)$ [Mi, III.4.2 et III.3.9]. Ce résultat provient du fait que tout torseur sous un schéma en groupes lisses est lisse.

Rappelons quelques défintions concernant de modules :

Définition 2.1. Soit M un A-module à gauche, i.e. $M \in A-\mathfrak{Mod}$. On dit que :
- M est *projectif* si le foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, \_) : A - \mathfrak{Mod} \longrightarrow \mathfrak{Ab}$ est exact.
- M est *fidèle* si le foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, \_) : A - \mathfrak{Mod} \longrightarrow \mathfrak{Ab}$ est fidèle.
- M est *fidèlement projectif* s'il est fidèle et projectif.

Soit A une R-algèbre finie, qui est un R-module fidèlement projectif de rang constant m sur R (e.g. si $\mathrm{Spec}\, R$ est connexe). Alors on dit qu'un A-module fidèlement projectif est de *rang relatif* n sur A, s'il est un R-module projectif de rang mn. La définition suivante est tirée de [Bs3], voir [Bs3, IV.1 (p.167)] et [Bs3, IV.2 (p.171)].

Définition 2.2. Soit D une R-algèbre finie, i.e. une R-algèbre qui est de type fini comme R-module. Soit M un D-module. On dit que

$$f\text{–}\mathrm{rang}_D(M) \geq r$$

si pour tout idéal maximal $\mathfrak{m} \in R$, le $D_\mathfrak{m}$-module $M_\mathfrak{m}$ possède un facteur direct isomorphe à $D^r_\mathfrak{m}$.

2.2 Algèbres d'Azumaya et groupe de Brauer

Les références pour les définitions et résultats suivants sont principalement les deux exposés de Grothendieck [Gr1] et [Gr2].

Définition 2.3. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un schéma noethérien. On appelle algèbre d'Azumaya de degré n sur X un faisceau $\mathcal{A}$ de $\mathcal{O}_X$-algèbres localement libres de rang n^2 tel que l'homomorphisme naturel

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A})$$

donné par $a \otimes b^{op} \mapsto (x \mapsto axb)$ est un isomorphisme.

Ceci équivaut à dire que $\mathcal{A}$ est un faisceau en $\mathcal{O}_X$-algèbres localement libres, localement isomorphe à $M_n(\mathcal{O}_X)$ pour la topologie étale, cf. [Gr1, th. 2.5.1]. En particulier, pour un schéma affine $X = \mathrm{Spec}\, R$, on retrouve les algèbres centrales séparables sur R [Kn, III.5.1.1] et pour $R = k$ un corps, les algèbres simples centrales sur k.

Observons que si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux algèbres d'Azumaya sur X, alors leur produit tensoriel $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}$ en est de même. L'ensemble de classes d'isomorphie par la relation d'équivalence "$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ si et seulement si les catégories $\mathfrak{Mod} - \mathcal{A}$ et $\mathfrak{Mod} - \mathcal{B}$ sont équivalents" est un groupe abélien dont l'opération est donnée par le produit tensoriel, cf. [Gr1, p.47]. On note ce groupe $\mathrm{Br}_{Az}(X)$. Pour X quasi-compact, ce groupe est de torsion, voir [Gr1, cor. 1.5]. On définit le groupe de Brauer cohomologique (ou simplement groupe de Brauer) de la façon suivante.

Définition 2.4. Soit X un schéma. Le deuxième groupe de cohomologie pour la topologie étale à coefficients dans $\mathbb{G}_m$ est appelé le *groupe de Brauer* de X et noté $\mathrm{Br}(X) = H^2(X, \mathbb{G}_m)$.

Pour $X = \mathrm{Spec}\, R$, R un anneau local, on a $H^2(R, \mu_l) = {}_lH^2(R, \mathbb{G}_m)$. Pour un corps k, on a $\mathrm{Br}_{Az}(k) = \mathrm{Br}(k)$. Pour tout schéma X on dispose d'un plongement naturel

$$\mathrm{Br}_{Az}(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}(X),$$

voir [Gr1, prop. 1.4]. Si X est affine, par un théorème de Gabber [Ga, Ch.II, Thm.1], cette injection induit un isomorphisme de $\mathrm{Br}_{Az}(X)$ avec le sous-groupe de torsion de $\mathrm{Br}(X)$. De plus on a le théorème suivant de Grothendieck.

Théorème 2.5. *Soit X un schéma noethérien de points maximaux $x_1, ..., x_n$. On a alors une injection*

$$\mathrm{Br}(X) \hookrightarrow \bigoplus_{1 \le i \le n} \mathrm{Br}(k(x_i)).$$

dans les deux cas suivants :

1. *X est régulier,*
2. *X est de dimension 1 et pour tout point fermé $x \in X$, le corps résiduel $k(x)$ est séparablement clos.*

En particulier, $\mathrm{Br}(X)$ *est de torsion dans ces deux cas.*

Démonstration. [Gr2, cor. 1.5, cor. 1.8 et cor.1.10]. □

Observons que l'on a alors un isomorphisme $\mathrm{Br}(X) = \mathrm{Br}_{Az}(X)$ pour X nothérien, affine et régulier.

Le théorème suivant de Wedderburn sur les algèbres centrales simples est utilisé par la suite librement :

Théorème 2.6. *Soit A une algèbre simple de dimension finie sur un corps k. Alors il existe un entier $r \ge 1$ et une algèbre à division Δ sur k, tels que A est isomorphe à l'anneau de matrices $M_r(\Delta)$. De plus Δ est unique à isomorphisme près.*

Démonstration. [GS, Th. 2.1.3] □

Il en est de même pour le fait suivant :

Proposition 2.7. *Soit A une algèbre d'Azumaya de rang m sur un anneau R. Soit P un module projectif de type fini sur A. Alors f–$\mathrm{rang}_A(P)$ est égal au rang relatif de P sur A.*

Démonstration. Soit n le rang relatif de P sur A. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de R. Il faut montrer que $P_\mathfrak{m}$ contient un facteur direct isomorphe à $(A_\mathfrak{m})^n$. Mais $A_\mathfrak{m}$ est une algèbre d'Azumaya sur un anneau semi-local et $P_\mathfrak{m}$ est un $A_\mathfrak{m}$-module qui est un module projectif de type fini de rang mn sur $R_\mathfrak{m}$. On peut donc appliquer [Kn, III.5.2.2] pour obtenir que $P_\mathfrak{m}$ est isomorphe au $A_\mathfrak{m}$-module libre $(A_\mathfrak{m})^n$. □

2.3 Formes hermitiennes, groupe de Witt et théorèmes de simplification

2.3.1 Involutions et formes hermitiennes

Soit A un anneau. Une involution sur A est un isomorphisme $\tau : A \longrightarrow A^{op}$ tel que $\tau^2(a) = a$ pour tout $a \in A$. Dans ce qui suit, on écrit parfois $\overline{a}$ au lieu de $\tau(a)$. Soit alors (A, τ) un anneau avec involution. Si $2 \in A^\times$, on définit :

$$\mathrm{Sym}(A, \tau) := \{a \in A \mid \tau(a) = a\}$$

et

$$\mathrm{Skew}(A, \tau) := \{a \in A \mid \tau(a) = -a\},$$

les ensembles des éléments symétriques et respectivement antisymétriques.

Soit dans ce qui suit (A, τ) un anneau avec involution (pas nécessairement avec $2 \in R^\times$). Soit M un A-module à gauche. Il peut être regardé comme A-module à droite $\overline{M}$ par la règle :

$$am = m\overline{a}, \quad m \in M.$$

Plus précisément on définit $M = \overline{M}$ comme le groupe additif sur lequel A agit par la règle ci-dessus. Si maintenant M est un A-module à gauche $M^\vee := \mathrm{Hom}_A(M, A)$ est un A-module à droite. Donc

$$M^* := \overline{\mathrm{Hom}_A(M, A)}$$

est un A-module à gauche. On peut définir un foncteur contravariant

$$^* : A - \mathfrak{Mod} \longrightarrow A - \mathfrak{Mod}$$

par $\varphi \mapsto \varphi^\vee$ où $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ et $\varphi^\vee$ est défini par $\varphi^\vee(f) = f\varphi$ pour $f \in N^\vee$, cf. [Kn, I.2.1]. De plus, on a une flèche canonique

$$\varpi_M^* = \varpi_M : M \longrightarrow M^{**},$$

cf. [Kn, I.2.1.2]. Sur la sous-catégorie de A-modules projectifs de type fini, la flèche ϖ_M est un isomorphisme et le foncteur * se restreint en une dualité, cf. [Kn, I.3.1.2].

Donc une involution sur un anneau non commutatif permet de définir une dualité sur sa catégorie des modules projectifs de type fini.

Définition 2.8. [Kn, II.2.3]
Soit (A, τ) un anneau avec involution et soit M un A-module fidèlement projectif. Un homomorphisme $h \in \operatorname{Hom}(M, M^*)$ est appelé *forme sesquilinéaire* et la paire (M, h) est appelée *module sesquilinéaire*. Si h est un isomorphisme, la paire (M, h) est appelée *espace sesquilinéaire*. Définissons

$$G(A, \tau) := \{u \in Z(A) \mid u\overline{u} = 1\},$$

où $Z(A)$ désigne le centre de A. Soit $\epsilon \in G(A, \tau)$ et $h \in \operatorname{Hom}(M, M^*)$ une forme sesquilinéaire. Si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & M^* \\ \varpi_M \downarrow & \nearrow h^* & \\ M^{**} & & \end{array}$$

est ϵ-commutatif, i.e. $h = \epsilon h^* \varpi_M$, alors h est appelé *forme ϵ-hermitienne* et la paire (M, h) est appelée *module ϵ-hermitien*. Si h est un isomorphisme, la paire (M, h) est appelée *espace ϵ-hermitien*.

Un morphisme α de modules sesquilinéaires $(M_1, h_1) \longrightarrow (M_2, h_2)$ est un homomorphisme $\alpha \in \operatorname{Hom}(M_1, M_2)$ tel que $h_1 = \alpha^* h_2 \alpha$, i.e. tel que

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\alpha} & M_2 \\ {\scriptstyle h_1}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_2} \\ M_1^* & \xleftarrow{\alpha^*} & M_2^* \end{array}$$

commute. Les isomorphismes sont appelés *isométries*.

Remarque 2.9. 1. *Si $\epsilon = 1$ les formes ϵ-hermitiennes sont juste appelées formes hermitiennes, et si $\epsilon = -1$ on les appelle anti-hermitiennes. Ces deux cas sont les plus importants.*

2. *Si l'anneau A est commutatif et l'involution est triviale, une forme hermitienne est une forme bilinéaire symétrique, et une forme anti-hermitienne est une forme alternée. Si $2 \in A^\times$, les formes symétriques correspondent aux formes quadratiques.*

Les (A, τ)-modules ϵ-hermitiens forment ainsi une catégorie. Les (A, τ)-espaces ϵ-hermitiens avec les isométries comme morphismes en forment une sous-catégorie. Cette sous-catégorie est notée $\operatorname{Herm}^\epsilon(A, \tau)$.

2.3.2 Comparaison de catégories de formes hermitiennes

Les deux propositions suivantes comparent des catégories de formes hermitiennes. La première est utile pour être ramené à une involution privilegiée, dite canonique ou standard, cf. [Kn, I.1.3], qui existe sur certaines algèbres, quitte, par exemple, à considérer les formes anti-hermitiennes à la place des formes hermitiennes (ou vice versa). Ceci nous est particulièrement utile dans les sections 5.4 et 5.5. La deuxième proposition est une forme de l'équivalence de Morita pour les catégories de formes hermitiennes.

Proposition 2.10. *Soit (A, τ) un anneau avec involution et soit $u \in A^\times$ tel que*

$$\tau' : x \mapsto u\,\tau(x)\,u^{-1}$$

est aussi une involution de A. Alors $\epsilon_0 := u\,\tau(u)^{-1} \in G(A, \tau)$, i.e. ϵ_0 est un élément du centre de A et $\epsilon_0\tau(\epsilon_0) = 1$. On a alors un isomorphisme de catégories qui respecte les sommes orthogonales et les espaces hyperboliques :

$$\mathrm{Herm}^\epsilon(A, \tau) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Herm}^{\epsilon\epsilon_0}(A, \tau')$$

defini par $(M, h) \mapsto (M, uh)$ où $(uh)(x, y) = uh(x, y)$ pour $x, y \in M$.

Démonstration. [Kn, I.5.8.2] □

Proposition 2.11. *Soit (A, τ) un anneau avec involution et soit (P, h_0) un espace ϵ_0-hermitien, où $\epsilon_0 \in \{\pm 1\}$. Soit $B = \mathrm{End}_A(P)$ et τ' l'involution adjointe sur B, i.e.*

$$\tau'(g) = h_0^{-1}\,g^*\,h_0.$$

Alors pour $\epsilon \in \{\pm 1\}$ la flèche

$$\mathrm{Herm}^\epsilon(A, \tau) \longrightarrow \mathrm{Herm}^{\epsilon\epsilon_0}(B, \tau')$$

donnée par

$$(M, h) \mapsto (\mathrm{Hom}_A(P, M), h'),$$

où

$$h'(f)(g) = \epsilon h_0^{-1}\,f^*\,h\,g$$

pour $f, g \in \mathrm{Hom}_A(P, M)$, est une équivalence de catégories.

Démonstration. Voir [Kn, I.9.3.5] et [Kn, II.3.4.2]. □

Corollaire 2.12. *Soit R un anneau avec $2 \in R^\times$ et soit $\epsilon \in \{\pm 1\}$. On a une équivalence de catégories*

$$\mathrm{Herm}^\epsilon(R, \mathrm{id}) \longrightarrow \mathrm{Herm}^{-\epsilon}(M_2(R), \sigma)$$

où σ est l'involution sur $M_2(R)$ donnée par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On applique la proposition 2.11 en posant $A = R$ avec l'involution triviale, $\epsilon_0 = -1$, $P = R^2$ et $h_0 : R^2 \times R^2 \longrightarrow R$ la forme alternée standard, définie par $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$: dans ce cas, l'involution adjointe sur $B = M_2(R)$ est bien l'involution σ. Le corollaire suit. □

Remarque 2.13. *L'involution σ est appelée l'involution standard de l'algèbre quaternionique $M_2(R)$, voir [Kn, I.1.3]. Elle est, par [Kn, Prop. I.1.3.4], l'unique involution standard sur $M_2(R)$.*

2.3.3 Groupe de Witt

Considérons maintenant $\mathcal{K}^+$, l'ensemble sous-jacent de la catégorie $\mathrm{Herm}^\epsilon(A,\tau)$ quotienté par la relation d'équivalence d'isométrie. La somme orthogonale de deux espaces hermitiens induit une structure de monoïde sur $\mathcal{K}^+$:

$$[(M',h')] + [(M',h')] = [(M',h') \perp (M',h')],$$

où [(M,h)] représente la classe d'isométrie d'un espace hermitien (M,h). En faisant de ce monoïde d'une manière canonique un groupe, la "construction de Grothendieck" expliquée dans ([Sch, 2.1]) par exemple, on obtient le groupe de Witt-Grothendieck $\widehat{W}^\epsilon(A,\tau)$. Le quotient de ce groupe abélien par le sous-groupe des classes définies par les espaces hyperboliques (voir [Kn, I.3.5] pour la définition d'un espace hyperbolique) est appelé le groupe de Witt de formes ϵ-hermitiennes sur l'anneau avec involution (A,τ) et est noté $W^\epsilon(A,\tau)$. Certains foncteurs entre catégories de formes hermitiennes induisent des homomorphismes (voir isomorphismes) de groupes de Witt. Deux exemples importants qui induisent des isomorphismes de groupes de Witt sont le "scaling" (proposition 2.10) et l'équivalence de Morita (proposition 2.11).

2.3.4 Théorèmes de simplification

Rappelons que pour un anneau commutatif R, $\operatorname{Spm} R$ est le sous-ensemble de $\operatorname{Spec} R$ consistant en les idéaux maximaux avec la topologie induite. Si R est noethérien, on a $\dim \operatorname{Spm} R \leq \dim \operatorname{Spec} R$, cf. [Kn, VI.2.2]. Observons aussi que $\dim \operatorname{Spm} R = 0$ si et seulement si R est semilocal. Pour l'anneau qui est l'objet principal de ce travail on a en fait égalité de la dimension du spectre et de celle du spectre maximal :

Lemme 2.14. *Soit $R = k[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ l'anneau de polynômes de Laurent à deux variables sur un corps algébriquement clos k. Alors on a* $\dim \operatorname{Spm} R = \dim \operatorname{Spec} R$.

Démonstration. Comme R est noethérien, on a $\dim \operatorname{Spm} R \leq \dim \operatorname{Spec} R$ et la chaîne d'inclusions de sous-ensembles fermés irréductibles de $\operatorname{Spm} R$

$$0 \subsetneq ((x-a),(x-b)) \subsetneq V((x-a)) \cap \operatorname{Spm} R$$

(où $a, b \neq 0$) est de longueur 2, donc $\dim \operatorname{Spm} R \geq 2 = \dim \operatorname{Spec} R$. □

On rappelle le théorème de simplification de Bass-Schanuel sur la simplification de modules projectifs sur les R-algèbres finies :

Théorème 2.15. *Soit R un anneau commutatif avec* $\dim \operatorname{Spm} R = d$. *Soit A une R-algèbre finie et P un A-module projectif tel que $f\text{–}\mathrm{rang}_A(P) > d$. Alors, pour tout A-module projectif de type fini Q et tout A-module P',*

$$P \oplus Q \simeq P' \oplus Q$$

entraîne que $P \simeq P'$.

Démonstration. [Bs3, IV, Cor. 3.5] □

Une version pour les algèbres à involutions est le théorème suivant, dû à Bak [Bk, Sect. 4 (p.60)].

Théorème 2.16. *Soit R un anneau commutatif avec $\dim \operatorname{Spm} R = d$. Soit (A, τ) une R-algèbre finie avec involution et soit P un A-module projectif de type fini. Soit $\epsilon \in \{\pm 1\}$ et supposons que (M, h), (M', h') et (N, g) sont des espaces ϵ-hermitiens sur (A, τ). Si*

$$(M, h) \perp \mathfrak{H}(P) \perp (N, g) \simeq (M', h') \perp (N, g)$$

et f–$\operatorname{rang}_A P > d$, alors $(M, h) \perp \mathfrak{H}(P) \simeq (M', h')$.

Démonstration. [Kn, VI.6.2.5] □

2.4 Involutions sur les algèbres d'Azumaya

Soit R un anneau (commutatif) avec $2 \in R^\times$. Soit (A, τ) une algèbre d'Azumaya sur R à involution. La restriction de τ à R, au centre de A, induit une involution $\tau|_R$ sur R. Comme R est commutatif, $\tau|_R$ est un automorphisme de R d'ordre 2. Notons $\operatorname{Fix}(\tau|_R) := \{r \in R \,|\, \tau(r) = r\}$. C'est un sous-anneau de R. Dans ce travail, deux cas particuliers nous sont utiles :

Définition 2.17. Si $\tau|_R = \mathrm{id}_R$, ie. $\operatorname{Fix}(\tau|_R) = R$, on dit que τ est une involution de *première espèce*.
Si R est une $\operatorname{Fix}(\tau|_R)$-algèbre quadratique (un module localement libre de rang 2), on dit que τ est une involution de *deuxième espèce.*

Remarque 2.18. *Comme $2 \in R^\times$, la condition sur R d'être une $\operatorname{Fix}(\tau|_R)$-algèbre quadratique revient à dire que R est une extension étale quadratique.*

Observons que si le groupe de Picard de R est sans torsion on obtient le corollaire suivant de la proposition 2.10 :

Corollaire 2.19. *Soit A une algèbre d'Azumaya sur un anneau commutatif R tel que $\operatorname{Pic}(R)$ est sans torsion. Soient τ et τ' deux involutions de la même espèce sur A. Alors il existe $\epsilon_0 \in \{\pm 1\}$ tel que l'on a pour tout $\epsilon \in \{\pm 1\}$ un isomorphisme de catégories*

$$\operatorname{Herm}^\epsilon(A, \tau') \xrightarrow{\sim} \operatorname{Herm}^{\epsilon\epsilon_0}(A, \tau).$$

Démonstration. La composition $\tau' \circ \tau$ est un R-automorphisme de A. Par [Kn, III.5.2], tout R-automorphisme de A est intérieur. On a donc un élément $u \in A^\times$ tel que $\tau' \circ \tau = int(u)$, i.e.

$$\tau'(x) = \tau'(\tau(\tau(x))) = u \cdot \tau(x) \cdot u^{-1}.$$

Le résultat suit alors de la proposition 2.10. □

Soit maintenant (A, τ) une algèbre d'Azumaya à involution sur un anneau R (quelconque avec $2 \in R^\times$). La théorie de la descente permet d'étudier ces algèbres à partir des algèbres de matrices. Si l'involution est de première espèce, le prochain lemme est fondamental et il nous renseigne sur les notions d'involution de type symplectique et d'involution de type orthogonal. Pour $u \in \mathbf{GL}_n(R)$, notons l'involution $x \mapsto u\, x^t\, u^{-1}$ sur l'algèbre des matrices $M_n(R)$ par σ_u.

Lemme 2.20. *Soit (A, τ) une algèbre d'Azumaya de rang n^2 à involution de première espèce sur un anneau commutatif R. Il existe une extension d'anneau fidèlement plate S/R telle que $\alpha : A \otimes_R S \xrightarrow{\sim} M_n(S)$ et telle que $\alpha(\tau \otimes \mathrm{id})\, \alpha^{-1} = \sigma_u$ pour un certain $u \in M_n(S)$ avec $u^t = \epsilon\, u$ et $\epsilon \in \mu_2(R)$. L'élément ϵ est indépendant du choix de S et α.*

Démonstration. Voir [Kn, III.8.1], en particulier [Kn, III.8.1.1]. □

L'élément ϵ est appelé la parité de (A, τ). Plus précisément :

Définition 2.21. Soit (A, τ) une algèbre d'Azumaya de rang n^2 à involution de première espèce sur un anneau commutatif R. Si $\epsilon = 1$, on dit que τ est de *type orthogonal*, si $\epsilon = -1$, on dit que τ est de *type symplectique*.

Énonçons un lemme d'annulation qui nous sera utile plus tard.

Lemme 2.22. *Soit S un anneau strictement hensélien et $\mathbf{G}$ un S-schéma en groupes lisse, alors $H^1(S, \mathbf{G}) = 1$.*

Démonstration. Soit k le corps résiduel de S, on a donc une flèche évaluation $ev : H^1(S, \mathbf{G}) \longrightarrow H^1(k, \mathbf{G}_k)$. L'ensemble $H^1(k, \mathbf{G}_k)$ est trivial puisque k est séparablement clos. Par [SGA3, XXIV, prop. 8.1], ev est une bijection, d'où le lemme. □

Ce lemme nous permet d'étendre au cas des anneaux beaucoup de descriptions des ensembles de cohomologie déjà connues dans le cas des corps.

Pour les algèbres d'Azumaya à involutions on peut aussi définir par descente les ensembles d'éléments symétriques et antisymétriques inversibles. Supposons dans ce qui suit que l'on se trouve dans un des cas deux suivants :

1. (A, τ) est une R-algèbre d'Azumaya à involution de première espèce ;
2. (A, τ) est une S-algèbre d'Azumaya à involution de deuxième espèce avec $\mathrm{Fix}(\tau|_S) = R$ (donc S/R est une extension étale de degré 2).

Remarque 2.23. *Désormais jusqu'à la fin de cette section tous les faisceaux s'entendent pour la topologie fidèlement plate de présentation finie.*

Définition 2.24. On définit les faisceaux d'ensembles suivants :

$$\mathfrak{Alg}_R \longrightarrow \mathfrak{Ens}$$

$$\begin{array}{lccl} \mathbf{A} : & R' & \mapsto & A \otimes_R R' \\ \mathbf{GL}_1(A) : & R' & \mapsto & GL_1(A \otimes_R R') \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{Sym}(A,\tau) : & R' & \mapsto & \{x \in \mathbf{A}(R') \mid \tau(x) = x\} \\
\mathbf{Sym}(A,\tau)^{\times} : & R' & \mapsto & \{x \in \mathbf{GL}_1(A)(R') \mid \tau(x) = x\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{Skew}(A,\tau) : & R' & \mapsto & \{x \in \mathbf{A}(R') \mid \tau(x) = -x\} \\
\mathbf{Skew}(A,\tau)^{\times} : & R' & \mapsto & \{x \in \mathbf{GL}_1(A)(R') \mid \tau(x) = -x\}.
\end{array}$$

Lemme 2.25. *Ces faisceaux sont représentables par des R-schémas affines et lisses sur R.*

Démonstration. Par descente fidèlement plate, cette question est locale pour la topologie fidèlement plate de présentation finie sur Spec R. On peut donc supposer que $A \simeq M_n(R)$ dans le premier cas et $A \simeq M_n(R) \times M_n(R)$ dans le deuxième. Il suit que l'on est ramené à $R = k$, un corps, pour lequel il est clair que $\mathbf{A}$ est juste l'espace affine de dimension n^2 sur k, et que $\mathbf{Sym}(A,\tau)$ et $\mathbf{Skew}(A,\tau)$ (resp. $\mathbf{Sym}(A,\tau)^{\times}$ et $\mathbf{Skew}(A,\tau)^{\times}$) sont des sous-foncteurs fermés de $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{GL}_1(A)$). Remarquons que l'on peut aussi donner une démonstration élémentaire (i.e. sans utilisation de descente) de cela. $\square$

Considérons maintenant l'action suivante du R-groupe algébrique $\mathbf{GL}_1(A)$ sur lui-même :

$$\mathbf{GL}_1(A) \times \mathbf{GL}_1(A) \longrightarrow \mathbf{GL}_1(A)$$
$$(a, x) \mapsto a \cdot x \cdot \tau(a).$$

On définit les deux R-schémas

$$\mathbf{Iso}(A,\tau) := \mathbf{Stab}_{\{1\}} = \{a \in \mathbf{GL}_1(A) \mid a\,\tau(a) = 1\}$$

le stabilisateur de 1, et

$$\mathbf{Sim}(A,\tau) := \mathbf{Stab}_{\{\mathbb{G}_m\}} = \{a \in \mathbf{GL}_1(A) \mid a\,\tau(a) \in \mathbb{G}_m\}$$

le stabilisateur de $\mathbb{G}_m$. Ils sont lisses sur R. Le premier groupe s'appelle le *groupe d'isométries* de (A,τ) et le second le *groupe de similitudes* de (A,τ). Observons que pour toute R-algèbre R', l'ensemble $\mathbf{GL}_1(A)(R') \,/\, \mathbf{Iso}(A,\tau)(R')$ s'identifie à l'orbite de 1 sous l'action du groupe abstrait $\mathbf{GL}_1(A)(R')$ sur lui-même, i.e. à l'ensemble $\{a\tau(a) \mid a \in \mathbf{GL}_1(A)(R')\}$. Comme un élément de la forme $a\tau(a)$ est symétrique, on peut définir un morphisme de préfaisceaux pour la topologie fidèlement plate sur R

$$f : \mathbf{GL}_1(A) \,/\, \mathbf{Iso}(A,\tau) \longrightarrow \mathbf{Sym}(A,\tau)^{\times}$$

par $a\tau(a) \mapsto a\tau(a)$.

Lemme 2.26. *Le morphisme de faisceaux $\tilde{f}$ associé à f est un isomorphisme. Donc le faisceau associé au préfaisceau*

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{Alg}_R & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\
R' & \mapsto & \mathbf{GL}_1(A)(R') \,/\, \mathbf{Iso}(A,\tau)(R')
\end{array}$$

est représentable par un R-schéma affine et lisse.

Démonstration. Comme $\tilde{f}$ est évidemment injectif, il s'agit de montrer sa surjectivité. On peut supposer que R est local et strictement hensélien.

Traitons le premier cas (i.e. A est une R-algèbre d'Azumaya à involution de première espèce). Alors on a $A \simeq M_n(R)$ pour un certain n par le lemme 2.22. Notons τ_0 l'involution $a \mapsto a^t$, où t signifie le transposé de a. Par le lemme 2.20 il existe un $u \in M_n(R)$ avec $\tau = int(u) \circ \tau_0$; alors $\tau(a) = u\, a^t\, u^{-1}$ pour tout $a \in M_n(R)$.

Supposons d'abord que $u \in \mathbf{Sym}(M_n(R), \tau_0)^\times(R)$, c'est-à-dire $u^t = u$. Soit $r \in \mathbf{Sym}(M_n(R), \tau)^\times(R)$. On a $ru \in \mathbf{Sym}(M_n(R), \tau_0)^\times(R)$. Comme $H^1(R, \mathbf{Iso}(M_n(R), \tau_0)) = 1$, par le lemme 2.22, toutes les involutions adjointes à des formes symétriques sont conjuguées sur $M_n(R)$ et on a $r\,u = v\,u\,v^t$ pour un certain $v \in \mathbf{GL}_n(R)$. Donc $r = v\tau(v)$ et $r \in \mathrm{Im}(\tilde{f})$.

Supposons maintenant que $u \in \mathbf{Skew}(M_n(S), \tau_0)^\times(R)$, i.e. $u^t = -u$. Soit $r \in \mathbf{Sym}(M_n(R), \tau)^\times(R)$. On a $r = (\frac{1}{2}ru - \frac{1}{2}(ru)^t)\, u^{-1}$. Comme r est inversible, $s := \frac{1}{2}ru - \frac{1}{2}(ru)^t \in \mathbf{Skew}(M_n(S), \tau_0)^\times(R)$. Les matrices u et s définissent des formes anti-symétriques sur R. Suivant [Kn, I.4.1.2] n doit alors être pair. Soit ν_0 l'involution symplectique définie par $x \mapsto a_0\, x^t\, a_0$, où

$$a_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_{\frac{n}{2}} \\ -I_{\frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

désigne la matrice alternée standard. Comme $H^1(R, \mathbf{Iso}(M_n(R), \nu_0)) = 1$, de nouveau par le lemme 2.22, toutes les involutions adjointes à des formes anti-symétriques sont conjuguées sur $M_n(R)$ et on a $s = v\,u\,v^t$ pour un certain $v \in \mathbf{GL}_n(R)$. Donc $r = v\tau(v)$ et $r \in \mathrm{Im}(\tilde{f})$.

Finalement si l'on se trouve dans le deuxième cas, alors A est une S-algèbre d'Azumaya, où S/R est une extension étale quadratique. Donc, par le lemme 2.22, $S \simeq R \times R$, $A \simeq M_n(R) \times M_n(R)^{op}$ et par [KMRT, Prop. 2.14][1], il existe $u \in \mathbf{GL}_n(R \times R)$ tel que $\tau(a) = u\,\epsilon(a)\,u^{-1}$ pour tout $a \in A$, où ϵ est l'involution d'échange : $\epsilon : (x, y) \mapsto (y, x)$. Comme $\tau^2 = \mathrm{id}$, on a $u\epsilon(u)^{-1} \in S^\times$. Soit $\lambda \in S^\times$ tel que $\epsilon(u) = \lambda\, u$. En appliquant ϵ aux deux cotés, on obtient $\mathrm{N}_{R\times R/R}(\lambda) = 1$. On a alors $\lambda = (w, w^{-1})$ pour un certain $w \in R^\times$. L'élément $\mu := (w, 1) \in R^\times \times R^\times$ satisfait à $\lambda = \mu\,\epsilon(\mu)^{-1}$ et l'élément $u' := \mu\, u$ est donc tel que

$$\epsilon(u') = u' \quad \text{et} \quad \tau(a) = u'\,\epsilon(a)\,u'^{-1}.$$

Soit maintenant $r \in \mathbf{Sym}(M_n(R \times R), \tau)^\times(R)$. Comme plus haut, on obtient $ru' \in \mathbf{Sym}(M_n(R \times R), \epsilon)^\times(R)$. Comme $H^1(R, \mathbf{Iso}(M_n(R \times R), \epsilon)) = 1$, par le lemme 2.22, toutes les involutions adjointes à des formes unitaires sont conjuguées sur $M_n(R \times R)$ et on a $r\,u' = v\,u'\,\epsilon(v)$ pour un certain $v \in \mathbf{GL}_n(R \times R)$. Donc $r = v\tau(v)$ et aussi ici, $r \in \mathrm{Im}(\tilde{f})$.

Observons que dans ce cas on pourrait aussi démontrer la représentabilité de $\mathbf{GL}_1(A)/\,\mathbf{Iso}(A, \tau)(S)$ par un argument analogue à celui de la preuve du lemme 2.25, et en utilisant la représentabilité des quotients de schémas sous l'action d'un groupe si $R = k$, un corps ([Bo, II.6.7]). □

[1]Bien que cette proposition soit rédigée pour R étant un corps, elle s'étend au cas où R est un anneau commutatif.

Proposition 2.27. *Supposons que $H^1(R, \mathbf{GL}_1(A)) = 1$. On a alors l'identification*

$$H^1(R, \mathbf{Iso}(A,\tau)) = \mathbf{Sym}(A,\tau)^\times(R)/\sim$$

où $s \sim s'$ si et seulement si $s' = a \cdot s \cdot \tau(a)$ pour un certain $a \in A^\times$.

Démonstration. Rappelons que $\mathbf{Iso}(A,\tau) = \mathbf{Stab}_{\{1\}}$. Considérons la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbf{Stab}_{\{1\}}(R) \longrightarrow \mathbf{GL}_1(A)(R) \xrightarrow{\quad a\,\mapsto\, a\,\tau(a)\quad} \mathbf{Sym}(A,\tau)^\times(R)$$

$$\xrightarrow{\partial} H^1(R, \mathbf{Stab}_{\{1\}}) \longrightarrow H^1(R, \mathbf{GL}_1(A)).$$

Comme $H^1(R, \mathbf{GL}_1(A)) = 1$, la flèche ∂ est surjective et par [Gir, ch. II, cor. 3.2.3] on a l'identification

$$H^1(R, \mathbf{Stab}_{\{1\}}) = \mathbf{GL}_1(A)(R) \setminus \mathbf{Sym}(A,\tau)^\times(R).$$

La proposition en résulte. En effet, calculons la fibre de ∂ en $\partial(s)$ pour $s \in \mathbf{Sym}(A,\tau)^\times(R)$. Pour cela tordons la suite exacte par un cocycle a_s représentant $\partial(s)$. On obtient alors une suite exacte d'ensembles pointés :

$$1 \longrightarrow \mathbf{Stab}_{\{s\}}(R) \longrightarrow \mathbf{GL}_1(A)(R) \xrightarrow{\quad a\,\mapsto\, a\cdot s\cdot\tau(a)\quad} \big({}_{a_s}\mathbf{Sym}(A,\tau)^\times\big)(R),$$

où ${}_{a_s}\mathbf{Sym}(A,\tau)^\times$ signifie le schéma tordu de $\mathbf{Sym}(A,\tau)^\times$ par le cocycle a_s. Mais on sait que

$$\begin{aligned} \partial^{-1}(\partial(s)) &= \mathrm{Im}\,\Big[\; \mathbf{GL}_1(A)(R) \xrightarrow{\quad a\,\mapsto\, a\cdot s\cdot\tau(a)\quad} \big({}_{a_s}\mathbf{Sym}(A,\tau)^\times\big)(R)\Big] \\ &= \{\, a\cdot s\cdot\tau(a) \mid a \in A^\times\}. \end{aligned}$$

Ceci montre que l'on a bien l'identification

$$H^1(R, \mathbf{Stab}_{\{1\}}) = H^1(R, \mathbf{Iso}(A,\tau)) = \mathbf{Sym}(A,\tau)^\times(R)/\sim\ .$$

□

Définition 2.28. On définit le *groupe orthogonal*

$$\mathbf{O}(A,\tau) := \mathbf{Iso}(A,\tau)$$

si l'involution τ est de première espèce et de type orthogonal, le *groupe symplectique*

$$\mathbf{Sp}(A,\tau) := \mathbf{Iso}(A,\tau)$$

si l'involution τ est de première espèce et de type symplectique et le *groupe unitaire*

$$\mathbf{U}(A,\tau) := \mathbf{Iso}(A,\tau)$$

si l'involution τ est de deuxième espèce.

Avec ces notations la proposition 2.27 se réécrit :

Proposition 2.29. *Sous les hypothèses de la proposition 2.27 on a*

$$H^1(R, \mathbf{O}(A,\tau)) = \mathbf{Sym}(A,\tau)^\times(R)/\sim$$

si l'involution τ est de première espèce et de type orthogonal,

$$H^1(R, \mathbf{Sp}(A,\tau)) = \mathbf{Sym}(A,\tau)^\times(R)/\sim$$

si l'involution τ est de première espèce et de type symplectique et

$$H^1(R, \mathbf{U}(A,\tau)) = \mathbf{Sym}(A,\tau)^\times(R)/\sim$$

si l'involution τ est de deuxième espèce.

Soit maintenant (A,τ) une algèbre d'Azumaya à involution de première espèce et de type orthogonal. Soit $\mathbf{SO}(A,\tau)$ le sous-groupe de $\mathbf{O}(A,\tau)$ des éléments de norme réduite 1, i.e.

$$\mathbf{SO}(A,\tau) = \{a \in \mathbf{GL}_1(A) \mid a\,\tau(a) = 1 \text{ et } \mathrm{Nrd}_A(a) = 1\}.$$

On a donc une description similaire pour l'ensemble $H^1(R, \mathbf{SO}(A,\tau))$. Pour cela il faut tenir compte du discriminant de l'involution τ. Posons la définition suivante.

Définition 2.30. Soit R un anneau. On définit le faisceau d'ensembles suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{SSym}(A,\tau)^\times : \ \mathfrak{Alg}_R &\longrightarrow \mathfrak{Ens} \\ R' &\mapsto \{(s,z) \in \mathbf{Sym}(A,\tau)^\times(R') \times \mathbb{G}_m(R') \mid \mathrm{Nrd}_{A\otimes_R R'}(s) = z^2\}. \end{aligned}$$

Lemme 2.31. *Ce faisceau est représentable par un R-schéma affine et lisse.*

Démonstration. Par descente fidèlement plate, $\mathbf{SSym}(A,\tau)^\times$ est représentable par un sous-schéma fermé de $\mathbf{Sym}(A,\tau) \times_R \mathbb{G}_m$ (cf. preuve du lemme 2.25). □

Considérons maintenant l'action suivante du R-groupe algébrique $\mathbf{GL}_1(A)$ sur le groupe $\mathbf{GL}_1(A) \times_R \mathbb{G}_{m,R}$:

$$\mathbf{GL}_1(A) \times (\mathbf{GL}_1(A) \times_R \mathbb{G}_{m,R}) \longrightarrow \mathbf{GL}_1(A) \times_R \mathbb{G}_{m,R}$$

$$\Big(a,(x,z)\Big) \mapsto \Big(a\cdot x\cdot \tau(a), \mathrm{Nrd}_A(a)z\Big).$$

Soit $\mathbf{Stab}_{\{(1,1)\}} = \{a \in \mathbf{GL}_1(A) \mid a\tau(a) = 1 \text{ et } \mathrm{Nrd}_A(a) = 1\}$ le stabilisateur de $(1,1)$. Observons que pour toute R-algèbre R', l'ensemble $\mathbf{GL}_1(A)(R')\,/\,\mathbf{Stab}_{\{(1,1)\}}(R')$ s'identifie à l'orbite de $(1,1)$ sous l'action du groupe abstrait $\mathbf{GL}_1(A)(R')$ sur $\mathbf{GL}_1(A)(R') \times_R \mathbb{G}_{m,R}(R')$, i.e. à l'ensemble

$$\Big\{ \Big(a\,\tau(a),\, \mathrm{Nrd}_{A\otimes_R R'}(a)\Big) \mid a \in \mathbf{GL}_1(A)(R') \Big\}.$$

Comme plus haut, on peut définir un morphisme de préfaisceaux pour la topologie fidèlement plate sur R

$$f' : \mathbf{GL}_1(A) \,/\, \mathbf{Stab}_{\{(1,1)\}} \longrightarrow \mathbf{SSym}(A,\tau)^\times$$

par $(a\tau(a),\, \mathrm{Nrd}_{A\otimes_R R'}(a)) \mapsto (a\tau(a),\, \mathrm{Nrd}_{A\otimes_R R'}(a))$.

Lemme 2.32. *Le morphisme de faisceaux $\tilde{f}'$ associé à f' est un isomorphisme. Donc le faisceau associé au préfaisceau*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Alg}_R & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\ R' & \mapsto & \mathbf{GL}_1(A)(R') \,/\, \mathbf{Stab}_{\{(1,1)\}}(R') \end{array}$$

est représentable par un R-schéma affine et lisse.

Démonstration. Comme $\tilde{f}'$ est évidemment injectif, il s'agit de montrer sa surjectivité. La surjectivité en la première composante est le lemme 2.26. Pour établir la surjectivité dans la seconde composante, on peut supposer R hensélien et local et en particulier A déployée. En effet par la définition de l'ensemble $\mathbf{SSym}(A,\tau)^\times$, si la première composante de l'image est $a\tau(a)$, alors la deuxième composante ne peut prendre que les valeurs $\mathrm{Nrd}_A(a)$ et $-\mathrm{Nrd}_A(a)$. Vu que A est déployée, il existe un élément $b \in \mathbf{GL}_1(A)(R)$ tel que $b\tau(b) = 1$ et $\mathrm{Nrd}_A(b) = -1$. Donc $(a\tau(a), \mathrm{Nrd}_A(a))$ et $(a\tau(a), -\mathrm{Nrd}_A(a))$ sont bien des éléments de $\mathbf{GL}_1(A)(R) \,/\, \mathbf{Stab}_{\{(1,1)\}}(R)$, comme $(ab)\tau(ab) = a\tau(a)$ et $\mathrm{Nrd}_A(ab) = -\mathrm{Nrd}_A(a)$.

On peut d'ailleurs démontrer la représentabilité de $\mathbf{GL}_1(A)/\,\mathbf{Stab}_{\{(1,1)\}}$ par un argument analogue à celui dans la preuve du lemme 2.25 et en utilisant la représentabilité des quotients de schémas sous l'action d'un groupe si $R = k$, un corps ([Bo, II.6.7]). □

Proposition 2.33. *Supposons $H^1(R, \mathbf{GL}_1(A)) = 1$, on a alors l'identification*

$$H^1(R, \mathbf{Stab}_{\{(1,1)\}}) = \mathbf{SSym}(A,\tau)^\times(R)/\approx$$

où $(s,z) \approx (s',z')$ si et seulement si $s' = a\cdot s\cdot \tau(a)$ et $z' = \mathrm{Nrd}_A(a)z$ pour un certain $a \in A^\times$.

Démonstration. Considérons la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbf{Stab}_{\{(1,1)\}}(R) \longrightarrow \mathbf{GL}_1(A)(R) \xrightarrow{a \mapsto \left(a\,\tau(a),\, \mathrm{Nrd}_A(a)\right)} \mathbf{SSym}(A,\tau)^\times(R)$$

$$\xrightarrow{\partial} H^1(R, \mathbf{Stab}_{\{(1,1)\}}) \longrightarrow H^1(R, \mathbf{GL}_1(A)).$$

Comme $H^1(R, \mathbf{GL}_1(A)) = 1$, la flèche ∂ est surjective et par [Gir, ch. II, cor. 3.2.3] on a l'identification

$$H^1(R, \mathbf{Stab}_{\{(1,1)\}}) = \mathbf{GL}_1(A)(R) \setminus \mathbf{SSym}(A,\tau)^\times(R).$$

La proposition en résulte. En effet, calculons la fibre de ∂ en un élément $(s,z) \in \mathbf{SSym}(A,\tau)^\times(R)$. Pour cela tordons la suite exacte par un cocycle $a_{(s,z)}$ correspondant à $\partial(s,z)$. On obtient alors :

$$1 \longrightarrow \mathbf{Stab}_{\{(s,z)\}}(R) \longrightarrow \mathbf{GL}_1(A)(R) \xrightarrow{a \mapsto \left(a\, s\, \tau(a),\, \mathrm{Nrd}_A(a)\, z\right)} \left({}_{a_{(s,z)}}\mathbf{SSym}(A,\tau)^\times\right)(R)$$

où ${}_{a_{(s,z)}}\mathbf{SSym}(A,\tau)^\times$ signifie le schéma tordu de $\mathbf{SSym}(A,\tau)^\times$ par le cocycle $a_{s,z}$. Mais on sait que

$$\begin{aligned} \partial^{-1}(\partial(s,z)) &= \mathrm{Im}\,\Big[\, \mathbf{GL}_1(A)(R) \xrightarrow{a \mapsto \left(a \cdot s \cdot \tau(a),\, \mathrm{Nrd}_A(a)\cdot z\right)} \left({}_{a_{(s,z)}}\mathbf{SSym}(A,\tau)^\times\right)(R) \Big] \\ &= \{\, (a\cdot s\cdot \tau(a),\ \mathrm{Nrd}_A(a)\, z) \mid a \in A^\times \}. \end{aligned}$$

Ceci montre que l'on a bien l'identification

$$H^1(R, \mathbf{Stab}_{\{(1,1)\}}) = \mathbf{SSym}(A,\tau)^\times(R)/\approx\ .$$

□

Comme on a $\mathbf{SO}(A,\tau) = \mathbf{Stab}_{\{(1,1)\}}$, la proposition se réécrit de la façon suivante :

Proposition 2.34. *Sous les hypothèses de la proposition 2.33 on a*

$$H^1(R, \mathbf{SO}(A,\tau)) = \mathbf{SSym}(A,\tau)^\times(R)/\approx$$

si τ est de type orthogonal.

Remarque 2.35. *Soit (A,τ) une S-algèbre d'Azumaya à involution de deuxième espèce avec $\mathrm{Fix}(\tau|_S) = R$. Donc S/R est une extension étale de degré 2. Observons par souci de complétude que, si $H^1(R, \mathbf{GL}_1(A)) = 1$, un argument analogue montre que*

$$H^1(R, \mathbf{SU}(A,\tau)) = \mathbf{SSym}(A,\tau)^\times(R)/\approx,$$

où

$$\mathbf{SU}(A,\tau) = \{a \in \mathbf{GL}_1(A) \mid a\,\tau(a) = 1 \textit{ et } \mathrm{Nrd}_A(a) = 1\}\ ,$$

$$\mathbf{SSym}(A,\tau)^\times(R') =$$

$$\{(s,z) \in \mathbf{Sym}(A,\tau)^\times(R') \times \mathbb{G}_m(R') \mid \ \mathrm{Nrd}_{A\otimes_R R'}(s) = \mathrm{N}_{S\otimes_R R'/R'}(z)\}$$

pour une R-algèbre R' et où $(s,z) \approx (s',z')$ si et seulement si $s' = a\cdot s\cdot \tau(a)$ et $z' = \mathrm{Nrd}_A(a) z$ pour un certain $a \in A^\times$, comme plus haut.

Chapitre 3

Les conjectures

On expose dans ce chapitre les deux conjectures énoncées dans [GP1], qui font l'objet principal de ce travail. Pour cela on introduit les notions d'une algèbre de lacets et deux invariants que l'on peut attacher à ces algèbres. Les définitions dans ce chapitre sont en grand partie tirées de [GP1].

Supposons, comme d'habitude, que k est un corps. On utilise dans ce chapitre les notations suivantes :

$R_n = k[t_1^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1}]$, $R_{n,d} = k[t_1^{\pm \frac{1}{d}}, ..., t_n^{\pm \frac{1}{d}}]$, et $R_{n,\infty} = \varinjlim R_{n,d}$;

$K_n = k(t_1^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1})$, $K_{n,d} = k(t_1^{\pm \frac{1}{d}}, ..., t_n^{\pm \frac{1}{d}})$, et $K_{n,\infty} = \varinjlim K_{n,d}$.

Pour les groupes algébriques linéaires sur k on fixe les conventions suivantes. Un k-groupe algébrique linéaire réductif ou semi-simple est compris dans le sens de Borel [Bo], en particulier il est supposé connexe. Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique semi-simple sur k. On note son revêtement universel $\widetilde{\mathbf{G}}$. Le noyau de l'isogénie centrale $\widetilde{\mathbf{G}} \longrightarrow \mathbf{G}$ est noté $\boldsymbol{\mu}$; c'est un groupe algébrique fini sur k. Le groupe adjoint de $\mathbf{G}$ est noté $\mathbf{G}^{ad}$; c'est le quotient de $\mathbf{G}$ par son centre. Pour les schémas en groupes ces conventions se traduisent de manière analogue (cf. [SGA3], [GP1]).

Définition 3.1. Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique semi-simple sur un corps k. Alors $\mathbf{G}$ est dit *isotrope*, s'il existe une immersion fermée $\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbf{G}$ sur k. Ceci est équivalent à la condition que $\mathbf{G}$ contient un groupe parabolique propre.

Rappelons aussi le fait suivant bien connu sur les anneaux de polynômes de Laurent :

Lemme 3.2. *Soient $n, d \geq 1$. Le groupe de Picard de $R_{n,d} = k[t_1^{\pm \frac{1}{d}}, ..., t_n^{\pm \frac{1}{d}}]$ est trivial, i.e. on a*

$$\mathrm{Pic}(R_{n,d}) = 0.$$

Démonstration. C'est une conséquence de [Ha, Prop. II.6.2 et Cor. II.6.16]. $\square$

Supposons à partir de maintenant jusqu'à la fin de ce chapitre que k est un corps algébriquement clos de caracteristique zéro et fixons une famille compatible de racines n-ièmes de l'unité primitives $(\zeta_n)_{n\geq 1}$, i.e. pour tout $l \geq 1$, $\zeta_{ln}^l = \zeta_n$.

Dans ce cas on dispose du théorème suivant plus profond : sur toute extension étale finie S de R_n, tout fibré vectoriel de rang d arbitraire est trivial, i.e. tout module projectif est en fait libre.

Théorème 3.3. *Soit S une extension étale finie connexe de R_n. Tout fibré vectoriel sur* $\operatorname{Spec} S$ *qui est localement trivial pour la topologie de Zariski est trivial, i.e.*

$$H^1_{Zar}(S, \mathbf{GL}_d) = 1$$

pour tout $d \geq 1$.

Démonstration. Pour $S = R_n$, le résultat peut-être déduit du théorème de Quillen-Suslin qui dit que tout fibré vectoriel, localement trivial sur l'espace affine de dimension n sur un corps, est trivial, voir [La, V.4.10]. Pour une extension étale finie connexe S de R, c'est une conséquence du fait que l'on peut trouver un k-isomorphisme $S \longrightarrow R$, cf. [GP3]. □

3.1 Classes de lacets

Soit $\mathbf{G}$ un k-groupe linéairement réductif, c'est-à-dire un groupe algébrique linéaire, dont la composante connexe de l'élément neutre est réductive. Soit $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ une famille d'éléments d'ordre fini de $\mathbf{G}$ qui commutent. Soit d un entier tel que $x_1^d = ... = x_n^d = 1$. Rappelons le revêtement galoisien $R_{n,d}$ de R_n, avec groupe de Galois $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n$ engendré par τ_i $(i = 1, ..., n)$ défini par

$$\tau_i(t_j^{1/d}) = (\zeta_d)^{\delta_{i,j}} t_j^{1/d}.$$

Ainsi, on peut définir le cocycle $\alpha(\mathbf{x}) \in Z^1(\mathrm{Gal}(R_{n,d}/R_n), \mathbf{G}(R_{n,d}))$ comme suit :

$$\alpha(\mathbf{x}) : \mathrm{Gal}(R_{n,d}/R_n) \to \mathbf{G}(k) \to \mathbf{G}(R_{n,d}), \qquad \tau_1^{i_1} ... \tau_n^{i_n} \mapsto x_1^{-i_1} ... x_n^{-i_n}.$$

Comme d'habitude, on note $[\alpha(\mathbf{x})]$ la classe de $\alpha(\mathbf{x})$ dans $H^1(R_n, \mathbf{G})$. Observons que cette classe est indépendante du choix de la période commune d. Les classes de la forme $[\alpha(\mathbf{x})]$ sont appelés *classes de lacets.* Elles forment un sous-ensemble $H^1_{loop}(R_n, \mathbf{G}) \subset H^1(R_n, \mathbf{G})$. Les éléments de ces classes sont appelés *torseurs à lacets.*

Observons que l'on a une action naturelle du groupe $GL_n(\mathbb{Z})$ sur l'ensemble des familles de n éléments d'ordre fini de $\mathbf{G}$ qui commutent : Soit $\mathbf{a} \in GL_n(\mathbb{Z})$ et $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ comme plus haut. On définit alors

$$({}^{\mathbf{a}}\mathbf{x})_i = \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{ij}} \quad \text{et} \quad {}^{\mathbf{a}}\mathbf{x} = (({}^{\mathbf{a}}\mathbf{x})_1, ..., ({}^{\mathbf{a}}\mathbf{x})_n).$$

Il suit que l'on obtient une action sur l'ensemble des cocycles $Z^1(\mathrm{Gal}(R_{n,d}/R_n), \mathbf{G}(R_{n,d}))$: on définit ${}^{\mathbf{a}}\alpha(\mathbf{x}) := \alpha({}^{\mathbf{a}}\mathbf{x})$. Finalement, cette action passe aux classes d'isomorphie et on obtient alors une action du groupe $GL_n(\mathbb{Z})$ sur l'ensemble de cohomologie $H^1(R_n, \mathbf{G})$.

3.1.1 L'indice de Witt-Tits et l'invariant de Brauer

Soit $\mathbf{G}$ maintenant un k-groupe algébrique réductif (connexe). Rappelons la définition de l'indice de Witt-Tits de $\mathbf{G}$. Soit K/k un corps et $[z] \in H^1(K, \mathbf{G})$. Le groupe tordu ${}_z\mathbf{G}$ admet une seule $\mathbf{G}(K)$-classe de conjugaison de sous-groupes paraboliques minimaux et tout tel $\mathbf{P}$ est $\mathbf{G}(\overline{K})$-conjugué à un sous-groupe parabolique minimal standard $\mathbf{P}_I \subset \mathbf{G}$, cf. [GP1, sect. 3]. Cet I est appelé l'indice de Witt-Tits de ${}_z\mathbf{G}$ et il dépend seulement de $[z] \in H^1(K, \mathbf{G})$, voir [BT, sect. 6.5]. Soit maintenant $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ comme plus haut une famille d'éléments de $\mathbf{G}$ d'ordre fini qui commutent. On peut alors définir l'indice de Witt-Tits de $\mathbf{x}$:

Définition 3.4. L'indice de *Witt-Tits* $I(\mathbf{x})$ de $\mathbf{x}$ est l'indice de Witt-Tits du groupe tordu ${}_{\alpha(\mathbf{x})}\mathbf{G}_{K_n}$.

Remarque 3.5. *On peut aussi définir l'indice de Tits d'une telle famille quand le k-groupe $\mathbf{F}$ est linéairement réductif, i.e. un groupe algébrique linéaire dont la composante connexe de l'élément neutre $\mathbf{G} := \mathbf{F}^0$ est réductive. On obtient dans ce cas une suite exacte de groupes algébriques*

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}^{ad} \longrightarrow \mathbf{Aut}(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathbf{Out}(\mathbf{G}) \longrightarrow 1,$$

voir [SGA3, XXV, th. 1.3]. Soit $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ une famille d'éléments de $\mathbf{F}$ d'ordre fini qui commutent. L'indice de Witt-Tits $I(\mathbf{x})$ de $\mathbf{x}$ est l'indice de Tits du K-groupe tordu ${}_{\alpha(\mathbf{x})}\mathbf{G}_K$ et admet la caractérisation intrinsèque suivante (qui généralise [GP1, Prop. 3.3]) : les éléments minimaux (pour l'inclusion) de l'ensemble des sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}$ normalisés par $x_1, ..., x_n$ sont tous conjugués par $\mathbf{G}(K)$ et leur type est $I(\mathbf{x})$.

Supposons maintenant que $n = 2$, i.e. $R = R_2 = k[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$, $K = K_2 = k[t_1, t_2]$. Dans ce cas on peut attacher un "invariant de Brauer" à la famille $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ comme suit. Considérons le revêtement universel simplement connexe

$$1 \longrightarrow \boldsymbol{\mu} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{G}} \longrightarrow \mathbf{G} \longrightarrow 1$$

de $\mathbf{G}$. Par [GP1, Prop. 3.11(4)] tout relèvement $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ de $\mathbf{x}$ à $\widetilde{\mathbf{G}}$ est une paire d'éléments d'ordre fini qui commutent presque, i.e. $[\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2] \in \mathcal{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})$, le centre de $\widetilde{\mathbf{G}}$. Comme la suite exacte $1 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}(k) \longrightarrow \widetilde{\mathbf{G}}(k) \longrightarrow \mathbf{G}(k) \longrightarrow 1$ est centrale, le commutateur $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) = [\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2] \in \widetilde{\mathbf{G}}$ ne dépend pas du relèvement $\mathbf{x}$. Par [GP1, Prop. 3.16], l'image de $[\alpha(\mathbf{x})]$ par l'homomorphisme connectant

$$\delta : H^1(R, \mathbf{G}) \longrightarrow H^2(R, \boldsymbol{\mu})$$

est donnée par $\delta([\alpha(\mathbf{x})]) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})^{-1}$.

Définition 3.6. L'élement $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})^{-1}$ est appelé l'*invariant de Brauer* de $\mathbf{x}$.

3.2 Formes d'algèbres sur des anneaux de polynômes de Laurent

3.2.1 Algèbres de multi-lacets

Pour énoncer les conjectures, on introduit la notion d'une algèbre de multi-lacets. Introduisons les ingrédients nécessaires pour la construction d'une telle algèbre :

Soit A une algèbre de dimension finie sur k. Soit $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ une famille d'automorphismes d'ordre fini de la k-algèbre A qui commutent. Soit d une période commune des σ_j, i.e. $\sigma_j^d = 1$ pour tout $j = 1, ..., n$.

Pour chaque $(i_1, ..., i_n) \in \mathbb{Z}^n$, considérons les espaces propres simultanés

$$A_{i_1 \dots i_n} = \{x \in A \mid \sigma_j(x) = \zeta_d^{i_j} x \ \text{ pour tout } \ 1 \leq j \leq n\}$$

(qui dépendent évidemment seulement des i_j modulo d).

Définition 3.7. L'*algèbre de multi-lacets* associée à cette donnée est la k-sous-algèbre $\mathfrak{L}$ de $A \otimes_k R_{n,\infty}$ définie comme suit :

$$\mathfrak{L} := \mathfrak{L}(A, \sigma) = \oplus A_{i_1 \dots i_n} \otimes t_1^{i_1/d} \dots t_n^{i_n/d} \subset A \otimes_k R_{n,d} \subset A \otimes_k R_{n,\infty}.$$

Remarque 3.8. *Observons que $\mathfrak{L}$ ne dépend pas du choix de la période d et que $\mathfrak{L}$ a une structure naturelle de R_n-algèbre.*

On vérifie que

$$\mathfrak{L} \otimes_{R_n} R_{n,d} \simeq_{R_{n,d}} (A \otimes_k R_n) \otimes_{R_n} R_{n,d} \simeq_{R_{n,d}} A \otimes_k R_{n,d}.$$

Comme $R_{n,d}/R_n$ est libre de rang fini, $\mathfrak{L}$ est une R_n-forme de $A \otimes_k R_n$ qui est trivialisée par l'extension $R_{n,d}/R_n$. Il correspond alors à une algèbre de multi-lacets comme plus haut un R_n-torseur $\mathbf{X}_{\mathfrak{L}}$ sous le schéma en groupes $\mathbf{Aut}(A)$. Par la théorie de la descente, $\mathbf{X}_{\mathfrak{L}}$ est représentable par le R_n-schéma affine, dont le foncteur des points est donné par

$$\mathbf{X}_{\mathfrak{L}}(S) = \mathrm{Hom}_{S-alg.}(\mathfrak{L} \otimes_{R_n} S, A \otimes_k S).$$

On note $[\mathbf{X}_{\mathfrak{L}}]$ la classe d'isomorphie du R_n-torseur $\mathbf{X}_{\mathfrak{L}}$. Donc

$$[\mathbf{X}_{\mathfrak{L}}] \in H^1(R, \mathbf{Aut}(A)).$$

3.2.2 Le cas des algèbres de Lie

Supposons maintenant que $A =: \mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple (déployée) de dimension finie sur k. On obtient la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbf{Aut}^0(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbf{Aut}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbf{Out}(\mathfrak{g}) \longrightarrow 1,$$

où $\mathbf{Aut}^0(\mathfrak{g})$ désigne la composante connexe de l'élément neutre de $\mathbf{Aut}(\mathfrak{g})$. Soit $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ une famille d'éléments d'ordre fini de $\mathbf{Aut}^0(\mathfrak{g})$ qui commutent. Alors $\mathrm{Ad}(\mathbf{x}) = (\mathrm{Ad}\ x_1, ..., \mathrm{Ad}\ x_n)$ est une famille d'automorphismes d'ordre fini de $\mathfrak{g}$ qui commutent. Par souci de simplicité, on note

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{g}, \mathbf{x}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{g}, \mathrm{Ad}\ \mathbf{x}).$$

3.3 Les conjectures

Supposons maintenant que $n = 2$, i.e. $R = R_2 = k[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ est l'anneau des polynômes de Laurent à deux variables sur k, et $K = K_2 = k(t_1, t_2)$ son corps de fractions. Rappelons que le corps k est supposé algébriquement clos de caractéristique zéro. Dans ce cas on trouve les deux conjectures suivantes dans [GP1, section 6] :

Conjecture A. *Soit* $\mathbf{G}$ *un schéma en groupes semi-simples sur* R*. Si* $\mathbf{G} \times_R K$ *est isotrope, alors la flèche de bord* $H^1(R, \mathbf{G}) \xrightarrow{\partial} H^2(R, \boldsymbol{\mu})$ *a un noyau trivial.*

Conjecture B. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie simple, de dimension finie sur* k *qui n'est pas de type A. Ensuite soient* $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ *et* $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ *deux paires d'automorphismes de* $\mathfrak{g}$ *qui commutent. Alors* $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathbf{x}) \otimes_R K$ *est une algèbre de Lie de dimension finie et isotrope sur* K*. De plus,*

$$\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathbf{x}) \simeq_{k-Lie} \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow I(\mathbf{x}) = I(\mathbf{y}).$$

Remarque 3.9. *1. La conjecture A pour un groupe déployé et la surjectivité de la flèche* ∂ *pour* $\mathbf{G}$ *non nécessairement isotrope a déjà été démontrée dans [GP1, Th. 4.18].*

2. Pour démontrer la conjecture A pour un groupe $\mathbf{G}$*, il suffit alors de montrer que* $H^1(R, \widetilde{\mathbf{G}}) = 1$ *par la remarque précédente. En effet, en regardant la suite exacte longue provenant de la suite exacte courte du revêtement universel* $1 \longrightarrow \boldsymbol{\mu} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{G}} \longrightarrow \mathbf{G} \longrightarrow 1$*, on voit facilement que l'on a une surjection*

$$H^1(R, \widetilde{\mathbf{G}}) \twoheadrightarrow \ker\Big(H^1(R, \mathbf{G}) \xrightarrow{\partial} H^2(R, \boldsymbol{\mu})\Big).$$

3. La conjecture B est probablement vraie plus généralement. Dans le chapitre 6 on montre que cette conjecture est vraie en rang assez grand pour $\mathfrak{g}$ *de type classique* B*,* C*,* D *et, sous certaines conditions, pour* $\mathfrak{g}$ *de type* A*.*

Dans les chapitres 4 et 5 on démontre différents résultats partiels sur la conjecture A, pour $\mathbf{G}$ étant un des types classiques A, B, C et D (i.e. pas de type ${}^3D_4$ ou ${}^6D_4$). Dans le chapitre 6 on démontre des résultats correspondants sur la conjecture B.

Chapitre 4

Le cas ${}^1A_{n-1}$ et les groupes orthogonaux

4.1 Le cas ${}^1A_{n-1}$

Comme d'habitude, R désigne un anneau commutatif et k un corps commutatif. Voici d'abord un théorème de Panin et Suslin [PS, Th. II] dont nous avons besoin dans cette section.

Théorème 4.1. *Soit X un schéma intègre de type fini et lisse sur k de corps de fonctions $K = k(X)$. Soit $S = \{x_1, ..., x_r\}$ un nombre fini de points de X. Notons $\mathcal{O}_S$ l'anneau semi-local, localisation en les points de X appartenant à S. De plus notons $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_S$ son spectre. Supposons que A est une algèbre d'Azumaya de degré n sur $\mathcal{O}_S$. Alors le complexe*

$$0 \to K_n(A) \to K_n(A_K) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in \mathcal{X}^{(1)}} K_{n-1}(A_{k(x)}) \xrightarrow{\partial} ... \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in \mathcal{X}^{(n)}} K_0(A_{k(x)}) \to 0$$

est exact.

Démonstration. [PS, Th. II] □

Comme dans le cas classique [BKP, V.6] on en tire la suite spectrale de Brown-Gersten-Quillen :

Corollaire 4.2. *Soit X un schéma de type fini et lisse sur k et A une algèbre d'Azumaya sur X. On a alors une suite spectrale :*

$$E_1^{s,t} = \bigoplus_{x \in X^{(s)}} K_{-s-t}(A_{k(x)}) \Rightarrow K_{-s-t}(A) \tag{4.1}$$

Supposons maintenant que $\mathbf{G}$ est un schéma en groupes semi-simples sur R de type ${}^1A_{n-1}$ avec $n \geq 2$. Le R-schéma en groupes semi-simples simplement connexe et déployé de type A_n est $\mathbf{SL}_n$. Son groupe adjoint est $\mathbf{PGL}_n$, c'est aussi le groupe d'automorphismes intérieurs de $\mathbf{SL}_n$ et de $\mathbf{PGL}_n$. On rappelle que

$\widetilde{\mathbf{G}}$ désigne le revêtement universel de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}^{ad}$ le groupe adjoint. Les schémas en groupes semi-simples sur R de type $^1A_{n-1}$ ($n \geq 1$) sont donc classifiés à isomorphisme près par l'ensemble pointé $H^1(R, \mathbf{PGL}_n)$ et $\widetilde{\mathbf{G}}$ est une R-forme de $\mathbf{SL}_n$ et $\mathbf{G}^{ad}$ est une R-forme de $\mathbf{PGL}_{n+1}$.

Comme il est décrit dans [Kne, Ch. II, 2.4] (cette description se limite au cas où R est un corps, mais elle s'étend sans difficulté au cas d'un anneau), on peut écrire pour toute R-algèbre S :

$$\widetilde{\mathbf{G}}(S) = \{x \in A \otimes_R S \mid \mathrm{Nrd}(x) = 1\},$$

pour une R-algèbre d'Azumaya A de degré n, unique à isomorphisme près. On a donc les correspondances bijectives :

$$\begin{aligned}
&H^1(R, \mathbf{PGL}_n) \\
&\longleftrightarrow \\
&\{R\text{-formes intérieures de } \mathbf{PGL}_n\} \\
&\longleftrightarrow \\
&\{R\text{-formes intérieures de } \mathbf{SL}_n\} \\
&\longleftrightarrow \\
&\{R\text{-algèbres d'Azumaya de degré } n\}.
\end{aligned}$$

Soit maintenant k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Supposons $R = k[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$, l'anneau des polynômes de Laurent à deux variables sur k. Notons $K = k(t_1, t_2)$ le corps de fractions de R.

Pour aborder la conjecture A pour $\mathbf{G}$ on comprend la flèche

$$H^1(R, \mathbf{G}) \longrightarrow H^2(R, \boldsymbol{\mu})$$

comme associant à une R-algèbre d'Azumaya sa classe dans le groupe de Brauer de R noté $\mathrm{Br}(R)$. Soit $\boldsymbol{\mu}_d$ le schéma des racines d-ièmes de l'unité $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_d$. On a alors $H^2(R, \boldsymbol{\mu}) \simeq {}_d\mathrm{Br}(R)$, comme $\mathrm{Pic}(R) = 0$ par lemme 3.2. Il s'agit donc de démontrer que $H^1(R, \mathbf{G}) \longrightarrow \mathrm{Br}(R)$ a un noyau trivial. Si A est l'algèbre d'Azumaya correspondante à $\mathbf{G}$ par les bijections plus haut, ceci équivaut à montrer que toute algèbre d'Azumaya Brauer-équivalente à A est en fait isomorphe à A. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
H^1(R, \mathbf{PGL}_n) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{Br}(R) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^1(K, \mathbf{PGL}_n) & \xrightarrow{\delta'} & \mathrm{Br}(K)
\end{array}$$

La flèche verticale de droite est une injection par [Gr1, Cor. 1.18]. On sait [GS, preuve de Th.4.4.5] que δ' est aussi injective. D'ailleurs, on sait que $\mathrm{Br}(R) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ [GP1, Prop. 2.1]. L'isomorphisme

$$\mathrm{Inv} : \mathrm{Br}(R) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est donné par $A(m,n) \mapsto \frac{m}{n}$ où $A(m,n)$ est l'algèbre cyclique de présentation

$$X^n = t_1,\ Y^n = t_2^m \text{ et } YX = \zeta_n XY.$$

Soient A et A' deux algèbres d'Azumaya représentant deux classes dans $H^1(R, \mathbf{PGL}_n)$ de même image, $[A(m,n)]$ dans $\mathrm{Br}(R)$. Soit $r = \mathrm{pgcd}(m,n)$. Comme δ' est injective, les classes de A et A' ont même image $[A_K] = [A'_K]$ dans $H^1(K, \mathbf{PGL}_n)$.

Définition 4.3. Soit A une algèbre d'Azumaya définissant une classe dans $[A] \in H^1(R, \mathbf{PGL}_n)$ et soit $[A_K]$ son image dans $H^1(K, \mathbf{PGL}_n)$, représentée par une algèbre simple centrale A_K sur K. Alors A (ou sa classe $[A]$) est dite *rationnellement isotrope* si le K-groupe algébrique tordu $\mathbf{PGL}_1(A_K)$ est isotrope sur K, i.e. s'il existe un monomorphisme $\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbf{PGL}_1(A_K)$ sur K (voir la définition 3.1).

Lemme 4.4. *L'algèbre d'Azumaya A de degré n sur R est rationnellement isotrope si et seulement si $\delta([A]) = [A(m,n)]$ pour* $\mathrm{pgcd}(m,n) \neq 1$.

Démonstration. Par [GS, Ch. 2.5], $A(m,n)_K$ est une algèbre à division si et seulement si $\mathrm{pgcd}(m,n) = 1$. Il s'agit donc de montrer qu'il y a un monomorphisme $\mathbb{G}_{m,K} \hookrightarrow \mathbf{PGL}_{1,K}(D)$ si et seulement si D n'est pas une algèbre à division sur K. Ceci est pourtant un résultat bien connu, voir [Ti]. □

Donc pour démontrer la conjecture A dans le cas ${}^1A_{n-1}$, il s'agit de voir que toute algèbre d'Azumaya Brauer-équivalente à une algèbre d'Azumaya de la forme $A(m,n)$ avec $\mathrm{pgcd}(m,n) \neq 1$ lui est en fait isomorphe. Commençons par un lemme qui nous est utile dans la démonstration de la proposition suivante et qui est un cas particulier de la conjecture II de Serre.

Lemme 4.5. *Soit A une algèbre d'Azumaya sur R. Alors*

$$H^1(K, \mathbf{SL}_1(A_K)) = 1.$$

Démonstration. On peut tordre la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{SL}_n \longrightarrow \mathbf{GL}_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$$

de K-groupes par la forme intérieure $\mathbf{SL}_1(A_K) = \{x \in A_K \mid \mathrm{Nrd}(x) = 1\}$ de $\mathbf{SL}_n$. Vu que $H^1(K, \mathbf{GL}_1(A_K)) = 1$ par le théorème 90 de Hilbert, on déduit de la suite exacte longue correspondant à cette suite exacte courte tordue une bijection

$$H^1(K, \mathbf{SL}_1(A_K)) \leftrightarrow K^\times / \mathrm{Nrd}(A_K^\times).$$

Mais par le théorème de Tsen, K est un corps C_2. La norme réduite, étant une fonction polynômiale à n^2 variables, homogène de degré n, représente alors tout élément de $K^\times$, i.e. $\mathrm{Nrd} : A_K^\times \longrightarrow K^\times$ est surjective. Par conséquent, on a bien $H^1(K, \mathbf{SL}_1(A_K)) = 1$ (cf. [Se, Ch.III, Ex.3.2 et Ch.II, n.4.5]). □

Proposition 4.6. *Soit A une algèbre d'Azumaya sur R. Alors $K_0(A) \simeq \mathbb{Z}$, i.e. tout module projectif de type fini sur A est stablement libre.*

Démonstration. On prouve cette proposition à l'aide de la suite spectrale de Panin-Suslin (4.1) :

$$E_1^{s,t} = \bigoplus_{x \in X^{(s)}} K_{-s-t}(A_{k(x)}) \Rightarrow K_{-s-t}(A).$$

Observons que $K_0(A_K) \simeq \mathbb{Z}$ par l'équivalence de Morita. En effet, on a $A_K \simeq M_r(\Delta)$ pour un entier r et une algèbre à division Δ et $K_0(\Delta) \simeq \mathbb{Z}$ par [Mil, Lem. 1.2]. Comme $E_2^{-2,-2}$, $E_2^{-1,-1}$ et $E_2^{0,0} = E_1^{0,0} = K_0(A_K)$ sont les quotients successifs d'une filtration de $E^0 = K_0(A)$, il suffit de montrer que $E_2^{-1,-1} = E_2^{-2,-2} = 0$ pour établir notre proposition.

Montrons que $E_2^{-1,-1} = 0$. Pour cela il faut montrer la surjectivité de la différentielle

$$d_1^{0,-1} : E_1^{0,-1} = K_1(A_K) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_0(A_{k(x)}) = E_1^{-1,-1}.$$

Considérons alors le diagramme commutatif suivant, dont la deuxième ligne est exacte en ses deux derniers termes non nuls :

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_K^\times & \longrightarrow & K_1(A_K) & \xrightarrow{d_1^{0,-1}} & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_0(A_{k(x)}) & & & & \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Nrd}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Nrd}_{(1)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Nrd}_{(0)}} & & & & \\
K^\times & \xrightarrow{\sim} & K_1(K) & \xrightarrow{d'} & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_0(k(x)) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^1(R) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Le groupe $\mathrm{CH}^1(R)$ est le premier groupe de Chow de R (cf. [Fu, 1.3]). Dans ce diagramme, le premier carré commute par [GS, Lem. 2.8.9] et le second par [PS, 3.3]. De plus, $k(x)$ est un corps de dimension 1 pour $x \in X^{(1)}$, donc $\mathrm{Br}(k(x)) = 0$. Donc si $x \in X^{(1)}$, $A_{k(x)} \simeq M_n(k(x))$, alors

$$K_0(M_n(k(x))) \xrightarrow{\simeq} K_0(k(x)) \simeq \mathbb{Z}$$

est un isomorphisme (équivalence de Morita). Il suit que $\mathrm{Nrd}_{(0)}$ est bien un isomorphisme.

De plus, comme $H^1(K, \mathbf{SL}_1(A_K)) = 1$ par le lemme précédent, la norme réduite Nrd est surjective. Il est bien connu que $K_1(K) \simeq K^\times$, donc la flèche $\mathrm{Nrd}_{(1)}$ est surjective. Pour montrer la surjectivité de $d_1^{0,-1}$ il reste à montrer la surjectivité de d'. Mais $\mathrm{CH}^1(\mathbb{A}_k^2) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{CH}^1(R)$ est une surjection et $\mathrm{CH}^1(\mathbb{A}_k^2) = 0$ par [Fu, Ex.2.1.1], donc d' est bien surjective.

Montrons maintenant $E_2^{-2,-2} = 0$, i.e. la surjectivité de la différentielle

$$E_1^{-1,-2} = \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_1(A_{k(x)}) \xrightarrow{d_1^{-1,-2}} \bigoplus_{x \in X^{(2)}} K_0(A_{k(x)}) = E_1^{-2,-2}.$$

On considère le diagramme suivant, commutatif par [PS, 3.3]. Sa deuxième ligne est exacte :

$$\begin{array}{ccccccc}
\bigoplus_{x\in X^{(1)}} K_1(A_{k(x)}) & \xrightarrow{d_1^{-1,-2}} & \bigoplus_{x\in X^{(2)}} K_0(A_k) & & & & \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Nrd}_{(1)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Nrd}_{(0)}} & & & & \\
\bigoplus_{x\in X^{(1)}} K_1(k(x)) & \xrightarrow{d'} & \bigoplus_{x\in X^{(2)}} K_0(k) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^2(R) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Comme $\mathrm{Br}(k) = 0$ et $\mathrm{Br}(k(x)) = 0$ pour $x \in X^{(1)}$, $A_k \simeq M_n(k)$ et $A_{k(x)} \simeq M_n(k(x))$. Donc par l'équivalence de Morita les deux flèches $\mathrm{Nrd}_{(1)}$ et $\mathrm{Nrd}_{(0)}$ sont des isomorphismes. De nouveau, $\mathrm{CH}^2(\mathbb{A}_k^2) \longrightarrow\!\!\!\!\to \mathrm{CH}^2(R)$ est surjective et $\mathrm{CH}^2(\mathbb{A}_k^2) = 0$ par [Fu, Ex.2.1.1], donc d' est bien surjectif. Ceci entraîne la surjectivité de $d_1^{-1,-2}$.

Comme $E_2^{-1,-1} = E_2^{-2,-2} = 0$, on a bien établi $K_0(A) = E^0 \simeq E_1^{0,0} = K_0(A_K) \simeq \mathbb{Z}$. □

On en tire le corollaire suivant :

Corollaire 4.7. *Soit A une algèbre d'Azumaya sur R. Alors tout A-module projectif de rang relatif ≥ 3 est libre.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 4.6 combinée avec le théorème 2.15 de simplification de Bass-Schanuel. En effet soit P un A-module projectif de rang relatif $r \geq 3$. Suivant la proposition 2.7, on a f–$\mathrm{rang}_A\ P = r \geq 3$. On a pour un certain $s \geq 3$

$$P \oplus A^{s-r} \simeq A^r \oplus A^{s-r},$$

comme P est stablement libre par la proposition 4.6. En appliquant le théorème 2.15 avec $Q = A^{s-r}$ on obtient que $P \simeq A^r$. □

Théorème 4.8. *Si $[A] \in H^1(R, \mathbf{PGL}_n)$ est telle que $\delta([A]) = [A(m,n)]$ avec $r := \mathrm{pgcd}(m,n) > 2$, alors la fibre de δ en $[A]$ est réduite à un élément, i.e. $A \simeq A(m,n)$.*

Démonstration. On peut supposer que $n, r \geq 3$. On considère l'algèbre $D = A(\frac{m}{r}, \frac{n}{r})$, donc D_K est une algèbre à division. Comme A et D ont même image dans le groupe de Brauer, il existe un D-module fidèlement projectif P, tel que $A = \mathrm{End}_D(P)$. Par [Kn1, 4.7.1] on a en fait f–$\mathrm{rang}_D(P) = r$. Le corollaire 4.7 montre que $P \simeq D^r$ et $A \simeq M_r(D)$. Donc on a bien $A \simeq A(m,n)$. □

Considérons la condition suivante sur un schéma en groupes semi-simples $\mathbf{G}$ de type ${}^1A_{n-1}$:

$$\begin{gathered} L'alg\grave{e}bre\ d'Azumaya\ correspondante\ \grave{a}\ \mathbf{G}\ est \\ Brauer-\acute{e}quivalente\ \grave{a}\ A(m,n)\ avec\ \mathrm{pgcd}(m,n) > 2. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Corollaire 4.9. *Supposons que $n \geq 2$ et que $\mathbf{G}$ est un schéma en groupes semi-simples (connexe) de type $^1A_{n-1}$ sur R. Supposons que soit n est premier, soit $\mathbf{G}$ satisfait à la condition (4.2). Soit $\boldsymbol{\mu}$ le noyau du revêtement universel $\tilde{\mathbf{G}} \twoheadrightarrow \mathbf{G}$. Alors la conjecture A est vraie pour $\mathbf{G}$, i.e. l'homomorphisme connectant*

$$H^1(R, \mathbf{G}) \longrightarrow H^2(R, \boldsymbol{\mu})$$

a un noyau trivial.

Démonstration. Soit $A(m, n)$ l'algèbre d'Azumaya correspondante à $\mathbf{G}$. On a $\widetilde{\mathbf{G}} = \mathbf{SL}_1(A(m, n))$ et $\mathbf{G}_{ad} = \mathbf{PGL}_1(A(m, n))$. Par la remarque 3.9 il suffit de montrer que $H^1(R, \mathbf{SL}_1(A(m, n))) = 1$. Considérons alors la suite exacte suivante d'ensembles pointés

$$H^1(R, \mathbf{SL}_1(A(m, n))) \xrightarrow{p^1_*} H^1(R, \mathbf{PGL}_1(A(m, n))) \xrightarrow{\partial} H^2(R, \boldsymbol{\mu}_n).$$

Celle-ci fait partie de la suite exacte longue provenant de la suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_n \longrightarrow \mathbf{SL}_1(A(m, n)) \xrightarrow{p} \mathbf{PGL}_1(A(m, n)) \longrightarrow 1.$$

Le théorème 4.8 montre que ∂ a un noyau trivial. Par [GP, preuve du Th. 3.17] la flèche p^1_* est injective. On a donc $H^1(R, \mathbf{SL}_1(A(m, n))) = 1$ et le résultat suit. □

4.2 Le cas des groupes orthogonaux

Dans cette section on expose par souci de complétude un résultat de Parimala, [Pa, Th. 3.5]. Supposons ici que R est un anneau commutatif avec Spec R connexe et $2 \in R^\times$.

Remarque 4.10. *Sauf mention expresse du contraire, toute forme quadratique est supposée régulière (i.e. l'homomorphisme induit entre le module quadratique et son dual est un isomorphisme) dans ce chapitre.*

Soit $\mathbf{G}$ un schéma en groupes semi-simples sur R de type B_n avec $n \geq 2$. Le schéma en groupes semi-simples simplement connexe déployé de type B_n est $\mathbf{Spin}_{2n+1} := \mathbf{Spin}(q)$, le groupe des spineurs associé à forme quadratique $q = \mathfrak{H}(R^n) \perp <1>$. Le centre de $\mathbf{Spin}_{2n+1}$ est $\boldsymbol{\mu}_2$ et le groupe spécial orthogonal $\mathbf{SO}_{2n+1}$ est son adjoint. Alors $\mathbf{G}$ est une R-forme de $\mathbf{Spin}_{2n+1}$ (dans ce cas $\mathbf{G} = \widetilde{\mathbf{G}}$ est simplement connexe) ou de $\mathbf{SO}_{2n+1}$ (dans ce cas $\mathbf{G}$ est adjoint).

Soit maintenant q une R-forme quadratique (regulière) de rang $2n + 1$. Par [Kn, IV.5.2.1] on a une suite exacte scindée

$$1 \longrightarrow \mathbf{SO}(q) \longrightarrow \mathbf{O}(q) \xrightarrow{det} \boldsymbol{\mu}_2 \longrightarrow 1 \tag{4.3}$$

de R-schémas en groupes linéairement réductifs. Pour la forme $q = \mathfrak{H}(R^n) \perp <1>$ on obtient la suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \to \mathbf{SO}_{2n+1}(R) \to \mathbf{O}_{2n+1}(R) \stackrel{det}{\to} \boldsymbol{\mu}_2(R) \to H^1(R, \mathbf{SO}_{2n+1})$$
$$\stackrel{i^1_*}{\to} H^1(R, \mathbf{O}_{2n+1}) \stackrel{det^1_*}{\to} H^1(R, \boldsymbol{\mu}_2).$$

Par [Kn, IV.3.2.1], l'ensemble pointé $H^1(R, \mathbf{O}_{2n+1})$ classifie les classes d'isométrie de formes quadratiques (régulières) de rang $2n+1$ sur R. Comme la suite exacte (4.3) est scindée pour toute forme quadratique de rang $2n+1$ sur R, on obtient par l'argument habituel de torsion que i^1_* est injective. En d'autres termes on a une inclusion

$$H^1(R, \mathbf{SO}_{2n+1}) \hookrightarrow H^1(R, \mathbf{O}_{2n+1}).$$

La flèche $\det^1_*$ associe à la classe d'une forme quadratique q son discriminant signé. Donc $H^1(R, \mathbf{SO}_{2n+1})$ classifie les classes d'isométrie de formes quadratiques (régulières) de rang $2n+1$ et de discriminant trivial.

D'un autre côté, tout automorphisme de $\mathbf{Spin}_{2n+1}$ est intérieur, donc on a les isomorphismes de R-schémas en groupes :

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{Spin}_{2n+1}) = \mathrm{Int}(\mathbf{Spin}_{2n+1}) \simeq \mathbf{SO}_{2n+1}\,.$$

Par suite, $H^1(R, \mathbf{SO}_{2n+1})$ classifie aussi les R-formes de $\mathbf{SO}_{2n+1}$ et $\mathbf{Spin}_{2n+1}$ à isomorphisme près. On a donc établi des bijections

$H^1(R, \mathbf{SO}_{2n+1})$

$$\longleftrightarrow$$

$\{R$-formes quadratiques régulières de rang $2n+1$ et de discriminant trivial$\}$

$$\longleftrightarrow$$

$\{R$-formes du groupe $\mathbf{Spin}_{2n+1}\}$

$$\longleftrightarrow$$

$\{R$-formes du groupe $\mathbf{SO}_{2n+1}\}$

par les identifications $q \mapsto \mathbf{Spin}(q)$ et $q \mapsto \mathbf{SO}(q)$. On voit ainsi que $\mathbf{G} \simeq \mathbf{SO}(q)$ ou $\mathbf{G} \simeq \mathbf{Spin}(q)$ pour une certaine R-forme quadratique de rang $2n+1$ (et de discriminant trivial).

Supposons maintenant que $\mathbf{G}$ est de type D_n avec $n \geq 4$. Le groupe semi-simple simplement connexe déployé de type D_n est $\mathbf{Spin}_{2n} := \mathbf{Spin}(q)$, le groupe des spineurs associé à la forme quadratique $q = \mathfrak{H}^n(R)$. Le centre de $\mathbf{Spin}_{2n}$ est $\boldsymbol{\mu}_4$ si n est impair et $\boldsymbol{\mu}_2 \times \boldsymbol{\mu}_2$ si n est pair. Le groupe adjoint de $\mathbf{Spin}_{2n}$ est $\mathbf{PSO}_{2n}$. Si n est impair, le quotient de $\mathbf{Spin}_{2n}$ par son sous-groupe $\boldsymbol{\mu}_2$ est le groupe spécial orthogonal $\mathbf{SO}_{2n}$. Pour obtenir $\mathbf{SO}_{2n}$ si n est pair, on quotiente $\mathbf{Spin}_{2n}$ par son sous-groupe $\boldsymbol{\mu}_2$ qui se factorise en $\boldsymbol{\mu}_2 \xrightarrow{i} \boldsymbol{\mu}_2 \times \boldsymbol{\mu}_2$, où $i(1) = (1,1)$, cf. [KMRT, p.375]. De plus le groupe d'automorphismes de $\mathbf{Spin}_{2n}$ (et donc de $\mathbf{SO}_{2n}$) est $\mathbf{PO}_{2n} := \mathrm{Ad}(\mathbf{O}_{2n})$, le groupe quotient de $\mathbf{O}_{2n}$ par son centre. Donc $H^1(R, \mathbf{PO}_{2n})$ classifie les R-formes de $\mathbf{Spin}_{2n}$, $\mathbf{SO}_{2n}$ ou $\mathbf{PSO}_{2n}$ à isomorphisme près. Considérons maintenant la condition suivante sur l'anneau R :

$$\begin{aligned} &Toute\ forme\ quadratique\ de\ rang\ pair \geq 2r\ sur\ R\ contient\ un \\ &facteur\ direct\ isométrique\ au\ plan\ hyperbolique\ < 1, -1 > . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Supposons que R satisfait à cette condition pour un certain $r \in \mathbb{N}$. Soit $n \geq r$. Donc par [Kn, IV.5.2.2] on a pour toute R-forme quadratique q de rang $2n$ une suite exacte scindée

$$1 \longrightarrow \mathbf{SO}(q) \longrightarrow \mathbf{O}(q) \xrightarrow{Di} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1 \tag{4.5}$$

de R-schémas en groupes linéairement réductifs. Elle induit une suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \to \mathbf{SO}(q)(R) \to \mathbf{O}(q)(R) \overset{\det}{\to} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(R) \to H^1(R, \mathbf{SO}(q)) \overset{i^1_*}{\to} H^1(R, \mathbf{O}(q)) \overset{Di^1_*}{\to} H^1(R, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Par [Kn, IV.2.2.1], l'ensemble pointé $H^1(R, \mathbf{O}(q))$ classifie les classes d'isométrie de formes quadratiques régulières de rang $2n$ sur R et l'image de i_* dans $H^1(R, \mathbf{O}(q))$ classifie les classes de telles formes qui sont de même discriminant que q. Comme la suite exacte (4.5) est scindée pour toute forme quadratique de rang $2n$ sur R, on obtient, comme plus haut, par l'argument habituel de torsion que i^1_* est injective, i.e. une inclusion

$$H^1(R, \mathbf{SO}(q)) \hookrightarrow H^1(R, \mathbf{O}(q)).$$

Il suit que l'ensemble $H^1(R, \mathbf{SO}(q))$ classifie les classes d'isométrie de formes quadratiques régulières de rang $2n$ sur R et de même discriminant que q.

Soit maintenant k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Rappelons que $R = R_2 = k[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ est l'anneau des polynômes de Laurent à deux variables sur k et $K = K_2 = k(t_1, t_2)$ son corps de fractions.

On déduit facilement du théorème de Parimala [Pa, Th. 3.5] le théorème suivant :

Théorème 4.11. *1. On a la simplification pour les R-formes quadratiques K-isotropes : soient q_1 et q_2 deux telles R-formes et supposons que $q_1 \perp q \simeq q_2 \perp q$ pour une R-forme quadratique q, alors $q_1 \simeq q_2$.*

2. Soient q et q' deux R-formes quadratiques K-isotropes. Si $q_K \simeq q'_K$ alors $q \simeq q'$.

3. Soit q une R-forme quadratique de rang ≥ 5. Alors q est R-isotrope et diagonalisable.

Démonstration. [GP1, Th. 6.2] □

Ce théorème montre que si q est une R-forme quadratique de rang ≥ 5, alors on a une injection

$$H^1(R, \mathbf{O}(q)) \hookrightarrow H^1(K, \mathbf{O}(q)).$$

Il montre également que notre anneau satisfait à la condition (4.4) avec $r = 3$. On a donc, par les discussions précédentes, une injection

$$H^1(R, \mathbf{SO}(q)) \hookrightarrow H^1(K, \mathbf{SO}(q)). \tag{4.6}$$

Gille et Pianzola [GP1, Cor. 6.3] ont alors démontré le corollaire suivant du théorème de Parimala :

Corollaire 4.12. *Soit q une R-forme quadratique de rang ≥ 5. Alors :*

1. $H^1(R, \mathbf{Spin}(q)) = 1$,
2. $H^1(R, \mathbf{SO}(q)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Démonstration. Montrons d'abord que $H^1(R, \mathbf{Spin}(q)) = 1$. On a une suite exacte de R-schémas en groupes linéairement réductifs

$$1 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_2 \longrightarrow \mathbf{Spin}(q) \longrightarrow \mathbf{SO}(q) \longrightarrow 1.$$

On en déduit un diagramme commutatif dont la première ligne est exacte :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{SO}(q) \arrow[r, "\mathrm{N}_S"] & H^1(R, \boldsymbol{\mu}_2) = R^\times/(R^\times)^2 \arrow[r] & H^1(R, \mathbf{Spin}(q)) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(R, \mathbf{SO}(q)) \arrow[d] \\ & & H^1(K, \mathbf{Spin}(q)) \arrow[r] & H^1(K, \mathbf{SO}(q)). \end{tikzcd}$$

Mais K est de dimension cohomologique 2, donc on a $H^1(K, \mathbf{Spin}(q)) = 1$, par le théorème de Merkurjev-Suslin, voir [Se, III.3.1]. Comme la flèche verticale à droite est injective par (4.6), la flèche $H^1(R, \mathbf{Spin}(R)) \longrightarrow H^1(R, \mathbf{SO}(q))$ est triviale. Ensuite, comme q est isotrope, aussi par le théorème 4.11, la norme spinorielle N_S est surjective. On a donc $H^1(R, \mathbf{Spin}(q)) = 1$.

Par la remarque 3.9(2), la flèche de bord

$$H^1(R, \mathbf{SO}(q)) \xrightarrow{\partial} H^2(R, \boldsymbol{\mu}_2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

a un noyau trivial. L'argument habituel de torsion montre alors qu'elle est injective. Comme elle est surjective par la remarque 3.9, cette flèche est en fait un isomorphisme. $\square$

Il suit que la conjecture A est vraie pour les groupes de type B_n $(n \geq 2)$ et les groupes de type D_n $(n \geq 4)$ qui sont des groupes de spineurs et des groupes spéciaux orthogonaux des formes quadratiques de rang ≥ 5.

Corollaire 4.13. *Soit $\mathbf{G}$ un R-schéma en groupes semi-simples (connexe) et notons $\boldsymbol{\mu}$ le noyau de son revêtement universel $\tilde{\mathbf{G}} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbf{G}$.*

1. *Supposons que* $\mathbf{G}$ *est de type* B_n*, avec* $n \geq 2$*. Alors l'homomorphisme connectant*

$$H^1(R, \mathbf{G}) \longrightarrow H^2(R, \boldsymbol{\mu})$$

est bijectif. En particulier, la conjecture A est vraie pour $\mathbf{G}$*.*

2. *Supposons que* $\mathbf{G}$ *est de type* D_n*, avec* $n \geq 4$*. Supposons de plus que* $\mathbf{G}$ *est isogène à* $\mathbf{Spin}(q)$ *où* q *est une* R*-forme quadratique de rang pair* ≥ 5*. Alors l'homomorphisme connectant*

$$H^1(R, \mathbf{G}) \longrightarrow H^2(R, \boldsymbol{\mu})$$

est bijectif. En particulier, la conjecture A est vraie pour $\mathbf{G}$*.*

Démonstration. Par la remarque 3.9(2) les deux asserations sont une conséquence du fait que $H^1(R, \mathbf{Spin}(q)) = 1$ pour une R-forme quadratique de rang ≥ 5. Vu que tout groupe semi-simplement connexe de type B_n est un groupe de spineurs d'une forme quadratique, les arguments habituels de torsion montrent que l'homomorphisme connectant est une injection dans le cas des groupes de type B_n, $n \geq 2$. $\square$

Chapitre 5

Le cas C_n, les autres groupes du type D_n et le cas ${}^2A_n$

5.1 Conventions, notations et préliminaires

Dans ce chapitre, on est confronté aux groupes de Witt des formes hermitiennes et anti-hermitiennes d'une algèbre d'Azumaya à involution sur un schéma. Le but des deux sections suivantes est de présenter des suites spectrales de groupes de Witt analogues à la suite spectrale de la K-théorie de la section 4.1. À l'aide de ces suites spectrales nous pouvons calculer les groupes de Witt d'une algèbre d'Azumaya à involution sur l'anneau $R = k[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$, où k est algébriquement clos de caractéristique zéro.

On utilise les conventions suivantes pour les catégories dérivées. Soit $\mathcal{E}$ une catégorie exacte. On note $D^b(\mathcal{E})$ sa catégorie dérivée bornée et T le foncteur de translation de cette catégorie. Selon l'usage habituel dans la théorie de Witt dérivée et cohérente, on utilise des complexes homologiques, donc $T(M_\bullet)_i = M_\bullet\,[1\,]_i = M_{i-1}$ pour tout $M_\bullet \in D^b(\mathcal{E})$. Si $\mathcal{E}$ possède un foncteur Hom intérieur ou un produit tensoriel $\otimes$, on utilise les conventions suivantes pour $\mathrm{Hom}(M_\bullet, N_\bullet)$ et $M_\bullet \otimes N_\bullet$: la différentielle en degré l est donnée par

$$\mathrm{Hom}(M_{-l-r}, N_{-r}) \ni f \;\mapsto\; f \cdot d^{M_\bullet}_{-l-r+1} \,+\, (-1)^{l+1}\, d^{N_\bullet}_{-r} \cdot f$$

et par

$$M_{l-r} \otimes N_r \ni m \otimes n \;\mapsto\; d^{M_\bullet}_{l-r}(m) \otimes n \,+\, (-1)^{l-r} m \otimes d^{N_\bullet}_r(n)$$

respectivement.

Soit X un schéma et $\mathcal{A}$ une algèbre d'Azumaya sur X. Dans cette section on utilise les notations suivantes :

– $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est la catégorie des $\mathcal{A}$-modules ;

– $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ est la catégorie des $\mathcal{A}$-modules cohérents $\mathcal{P}$ tel que $\mathcal{P}_x$ est un $\mathcal{A}_x$-module projectif pour tout $x \in X$;
– $\mathcal{M}_{qc}(\mathcal{A})$ est la catégorie des $\mathcal{A}$-modules quasi-cohérents ;
– $\mathcal{M}_c(\mathcal{A})$ est la catégorie des $\mathcal{A}$-modules cohérents ;
– $D^b_c(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ (respectivement $D^b_c(\mathcal{M}_{qc}(\mathcal{A}))$) est la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée bornée $D^b(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ (respectivement $D^b(\mathcal{M}_{qc}(\mathcal{A}))$) contenant les complexes qui ont des faisceaux de cohomologie cohérents.

Observons que, puisque $\mathcal{A}$ est une algèbre d'Azumaya, $\mathcal{A}$ est localement libre sur X, donc $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{M}(\mathcal{A})$. On appelle parfois les modules dans cette catégorie A-modules projectifs. Si $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X$, on écrit ces catégories simplement $\mathcal{M}(X)$, $\mathcal{P}(X)$, ...

Le lemme suivant nous donne une identification qui sera utilisée tacitement dans la suite :

Lemme 5.1. *Soit X un schéma noethérien et $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre cohérente. Alors le morphisme naturel*

$$D^b_c(\mathcal{M}_{qc}(\mathcal{A})) \longrightarrow D^b_c(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. [Gil1, Lem. 1.4] □

Ensuite, rappelons la notion d'anneau de Gorenstein :

Définition 5.2. Soit R un anneau local et noethérien. Alors R est dit un anneau de *Gorenstein* si la dimension injective du R-module R est finie, i.e. $\mathrm{injdim}_R R < \infty$. Un anneau noethérien est dit de *Gorenstein* si toute localisation à un idéal maximal est un anneau de Gorenstein. Un schéma localement noethérien est dit de *Gorenstein* si tous ses anneaux locaux sont de Gorenstein.

Lemme 5.3. *Soit R un anneau local de Gorenstein. Alors le R-module R possède une résolution injective de longueur finie.*

Démonstration. C'est une conséquence de [BH, 3.2.9] et de [BH, 3.2.10]. □

Remarque 5.4. *1. Voir l'annexe A pour la structure d'une résolution injective.*

2. Observons qu'en particulier un anneau régulier est de Gorenstein.

Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ est muni d'une involution τ. Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{G} \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_X)$. On note alors $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{(\mathcal{A},\tau)}$ le foncteur contravariant $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ défini par

$$\mathcal{F} \mapsto \overline{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})}.$$

Si $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X$ et τ est de première espèce (donc $\tau = \mathrm{id}$), on écrit simplement $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$. Supposons maintenant que pour tout $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$, on ait $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{(\mathcal{A},\tau)} \in \mathcal{C}$. Dans ce cas on note $\varpi^{\mathcal{G}}$ le morphisme de foncteurs $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathfrak{D}_{\mathcal{G}}^{(\mathcal{A},\tau)}\mathfrak{D}_{\mathcal{G}}^{(\mathcal{A},\tau)}$; il est indépendant de l'involution τ. Observons que si $\mathfrak{D}_{\mathcal{G}}^{(\mathcal{A},\tau)}$ est une dualité (sur $\mathcal{C}$), alors $\varpi^{\mathcal{G}}$ est le morphisme de double dual (cf. [Gil1, 2.3])

5.2 La suite spectrale de S. Gille pour les algèbres d'Azumaya à involution de première espèce

On expose dans cette section une suite spectrale de groupes de Witt de S. Gille (cf. [Gil1]) et on énonce un résultat de compatibilité de cette suite spectrale avec l'équivalence de Morita. La preuve de ce résultat est exposée dans l'appendice.

Convention. *Dans cette section on suppose que tous les schémas sont des* $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$*-schémas noethériens.*

5.2.1 Groupes de Witt cohérents

Soit maintenant X un schéma admettant un complexe dualisant $\mathcal{I}_\bullet$. Rappelons que ceci veut dire que $\mathcal{I}_\bullet \in D^b_c(\mathcal{M}_{qc}(X))$ est un complexe de $\mathcal{O}_X$-modules injectifs et que le morphisme naturel

$$\varpi^{\mathcal{I}}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}_\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_\bullet, \mathcal{I}_\bullet), \mathcal{I}_\bullet)$$

est un quasi-isomorphisme pour tout $\mathcal{F}_\bullet \in D^b_c(\mathcal{M}(X))$. (Pour des généralités sur les complexes dualisants voir [Ha, Ch. V].) Observons que tout schéma de Gorenstein (donc en particulier tout schéma régulier) de dimension de Krull finie admet un tel complexe : en effet tout $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1 admet une résolution injective finie et une résolution injective du $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{O}_X$ est un complexe dualisant pour X. Un tel $\mathcal{I}_\bullet$ a alors pour propriété que le foncteur

$$\mathcal{D}_{\mathcal{I}} : \mathcal{F}_\bullet \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_\bullet, \mathcal{I}_\bullet)$$

est une dualité 1-exacte sur $D^b_c(\mathcal{M}(X))$. Soit maintenant $\mathcal{A}$ une algèbre d'Azumaya sur X avec involution de première espèce τ. Dans ce cas, cette dualité $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$ s'étend sans difficulté [Gil1, 2.3] en une dualité 1-exacte

$$\mathcal{D}^{(\mathcal{A},\tau)}_{\mathcal{I}} : \mathcal{F}_\bullet \mapsto \overline{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_\bullet, \mathcal{I}_\bullet)}$$

sur $D^b_c(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$. Il suit que l'on obtient ainsi une catégorie triangulée avec dualité $(D^b_c(\mathcal{M}(\mathcal{A})), \mathcal{D}^{(\mathcal{A},\tau)}_{\mathcal{I}}, 1, \varpi^{\mathcal{I}})$ dans le sens de Balmer [Ba1]. Si $Z \subset X$ est un sous-schéma fermé de X, la dualité $\mathcal{D}^{(\mathcal{A},\tau)}_{\mathcal{I}}$ se restreint en une dualité sur $D^b_{c,Z}(\mathcal{M}\mathcal{A})$ [Gil1, 2.3], la sous-catégorie pleine de $D^b_c(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ des complexes à support homologique dans Z.

Définition 5.5. Les i-èmes groupes de Witt de la catégorie triangulée avec dualité $(D^b_c(\mathcal{M}(\mathcal{A})), \mathcal{D}^{(\mathcal{A},\tau)}_{\mathcal{I}}, 1, \varpi^{\mathcal{I}})$ sont notés $\widetilde{W}^i(\mathcal{A}, \tau, \mathcal{I})$ et sont appelés groupes de Witt *cohérents.* Pour un sous-schéma fermé Z de X, les i-èmes groupes de Witt de la catégorie triangulée avec dualité $(D^b_{c,Z}(\mathcal{M}(\mathcal{A})), \mathcal{D}^{(\mathcal{A},\tau)}_{\mathcal{I}}, 1, \varpi^{\mathcal{I}})$ sont notés $\widetilde{W}^i_Z(\mathcal{A}, \tau, \mathcal{I})$ et sont appelés groupes de Witt cohérents *à support dans* Z.

5.2.2 Comparaison avec groupes de Witt usuels

Dans cette sous-section, soit X un schéma de Gorenstein de dimension de Krull finie, soit $(\mathcal{A},\tau)$ comme plus haut et soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur X (i.e. un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1). Dans ce cas on peut construire trois différents "types" de groupes de Witt. Pourtant, sous des hypothèses raisonnables, ces groupes sont tous isomorphes.

<u>Le groupe de Witt cohérent :</u> Comme X est de Gorenstein de dimension de Krull finie, $\mathcal{L}$ a une résolution injective finie par $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents, $\mathcal{I}_\bullet$:

$$\mathcal{I}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{I}_1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{-n+1}} \mathcal{I}_{-n} \longrightarrow 0,$$

avec $\mathcal{I}_{-j} \in \mathcal{M}_{qc}(X)$. On considère $\mathcal{I}_\bullet$ comme un objet de la catégorie dérivée $D^b_c(\mathcal{M}_{qc}(X))$, tel que $\mathcal{I}_0$ se trouve en dégré zéro. Le complexe $\mathcal{I}_\bullet$ est bien un complexe dualisant de X, et les groupes de Witt cohérents correspondants sont notés $\widetilde{W}^i(\mathcal{A},\tau,\mathcal{L})$. Ce groupe est donc le i-ième groupe de Witt de la catégorie dérivée avec dualité $(D^b_c(\mathcal{M}(\mathcal{A})), \mathcal{D}^{(\mathcal{A},\tau)}_{\mathcal{I}}, 1, \varpi^{\mathcal{I}})$.

<u>Le groupe de Witt dérivé usuel :</u> Comme $\mathcal{A}$ est une algèbre d'Azumaya, on a $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Le foncteur contravariant $\mathcal{D}^{(\mathcal{A},\tau)}_{\mathcal{L}} := \overline{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\_,\mathcal{L})}$ est une dualité sur $D^b(\mathcal{P}(\mathcal{A}))$. On note les groupes de Witt triangulaires de cette catégorie avec dualité $W^i(\mathcal{A},\tau,\mathcal{L})$. Ce groupe est donc le i-ième groupe de Witt de la catégorie dérivée avec dualité $(D^b(\mathcal{P}(\mathcal{A})), \mathcal{D}^{(\mathcal{A},\tau)}_{\mathcal{L}}, 1, \varpi^{\mathcal{L}})$.

<u>Le groupe de Witt classique :</u> Enfin on dispose des groupes de Witt usuels des formes hermitiennes et anti-hermitiennes de l'algèbre à involution $(\mathcal{A},\tau)$, $W^+(\mathcal{A},\tau)$ et $W^-(\mathcal{A},\tau)$, voir [Kn, I.10.1] ou la section 2.3.3. Ces deux groupes sont donc les groupes de Witt de formes hermitiennes et anti-hermitiennes de la catégorie additive avec dualité $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathcal{D}^{(\mathcal{A},\tau)}_{\mathcal{A}}, \varpi^{\mathcal{A}})$.

Maintenant, comme X est de Gorenstein, on a toujours un homomorphisme entre les deux premiers groupes de Witt : $W^i(\mathcal{A},\tau,\mathcal{L}) \longrightarrow \widetilde{W}^i(\mathcal{A},\tau,\mathcal{L})$ qui dépend d'un choix d'un quasi-isomorphisme $\gamma : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{I}_\bullet$. Si X est régulier, cet homomorphisme est un isomorphisme, cf. [Gil1, 2.10]. De plus, comme $\mathcal{A}$ est une algèbre d'Azumaya, on peut comparer le deuxième et le troisième groupe de Witt. En effet, on a pour le fibré en droites trivial $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ les isomorphismes suivants :

$$W^i(\mathcal{A},\tau,\mathcal{O}_X) \approx \begin{cases} W^+(\mathcal{A},\tau) & \text{si } i \equiv 0 \mod 4\,; \\ W^-(\mathcal{A},\tau) & \text{si } i \equiv 2 \mod 4. \end{cases}$$

voir [Ba2, Th. 4.3]. Pour démontrer ceci on utilise le lemme suivant :

Lemme 5.6. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre d'Azumaya sur X alors il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}, \mathcal{O}_X)$$

de $\mathcal{A}$-bimodules.

Démonstration. Considérons la trace réduite $\mathrm{Tr} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}_X$. Elle définit une forme quadratique non singulière [Kn, I.7.3.5]

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

par $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(xy)$. Donc l'homomorphisme induit

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{O_X}(\mathcal{A}, \mathcal{O}_X),$$

défini par $x \mapsto \mathrm{Tr}_x$ (où $\mathrm{Tr}_x(y) = \mathrm{Tr}(xy)$ pour $y \in \mathcal{A}$), est un isomorphisme. C'est en fait un isomorphisme de $\mathcal{A}$-bimodules comme $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$ pour tout $a, b \in \mathcal{A}$. □

Ainsi, on a un isomorphisme

$$\rho_{\mathcal{F}_\bullet,\mathcal{A}} : \overline{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_\bullet, \mathcal{O}_X)} \simeq \overline{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_\bullet, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}, \mathcal{O}_X))} \simeq \overline{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_\bullet, \mathcal{A})}. \quad (5.1)$$

pour tout $\mathcal{F}_\bullet \in D^b_c(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$, cf. [Gil1, 2.10].

5.2.3 Construction de la suite spectrale

Soit X un schéma de dimension de Krull finie n, avec un complexe dualisant $\mathcal{I}_\bullet$, cf. section 5.2.1. Soit

$$\mu_{\mathcal{I}} : X \longrightarrow \mathbb{Z}$$

la fonction codimension correspondante, cf. [Ha, Ch. V]. Quitte à translater le complexe $\mathcal{I}_\bullet$, on peut supposer que $\min(\mu_{\mathcal{I}}) = 0$ et $\max(\mu_{\mathcal{I}}) = n$. Dans le cas où X est un schéma de Gorenstein, $\mu_{\mathcal{I}}$ correspond à la codimension usuelle (i.e. on a $\mu_{\mathcal{I}}(x) = p$ pour $x \in X$ si $\mathrm{codim}_X(\overline{\{x\}}) = p$). Supposons alors que, pour un certain $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{I}_\bullet$ est de la forme :

$$\mathcal{I}_0 \longrightarrow \mathcal{I}_{-1} \longrightarrow ... \longrightarrow \mathcal{I}_{-n} \longrightarrow 0,$$

où le terme $\mathcal{I}_{-i}$ se situe en degré i. Soit maintenant $(\mathcal{A}, \tau)$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre d'Azumaya à involution de première espèce. On a une filtration finie de $D^b_c(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ associée à $\mu_{\mathcal{I}}$. Notons $D^p_{\mathcal{A},\mathcal{I}} = D^b_c(\mathcal{M}(\mathcal{A}))^{(p)}$ la sous-catégorie pleine de $D^b_c(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ dont les objets sont des complexes $\mathcal{F}_\bullet$ tels que $\mu_{\mathcal{I}}(x) \geq p$ pour tout x dans le support homologique de $\mathcal{F}_\bullet$. On a alors une filtration :

$$D^b_c(\mathcal{M}(\mathcal{A})) = D^0_{\mathcal{A},\mathcal{I}} \supseteq D^1_{\mathcal{A},\mathcal{I}} \supseteq ... \supseteq D^{n-1}_{\mathcal{A},\mathcal{I}} \supseteq D^n_{\mathcal{A},\mathcal{I}} \supseteq (0), \quad (5.2)$$

Soit maintenant $x \in X$ et $\mathcal{O}_x$ l'anneau local en x, et soit $\dim \mathcal{O}_x = p$. Notons $\mathcal{A}_x = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_x$. En localisant le complexe $\mathcal{I}_\bullet$ on obtient un complexe $(\mathcal{I}_\bullet)_x$:

$$(\mathcal{I}_0)_x \longrightarrow (\mathcal{I}_{-1})_x \longrightarrow ... \longrightarrow (\mathcal{I}_{-p})_x \longrightarrow 0,$$

avec $(\mathcal{I}_{-i})_x$ en degré i. Comme X est noethérien, $\mathcal{O}_x$ est un anneau local noethérien et par conséquent $(\mathcal{I}_x)_\bullet$ est un complexe dualisant résiduel, cf. [Gil5, Sect. 1]. Donc $E_x := (\mathcal{I}_p)_x$ est une enveloppe injective du corps résiduel $k(x)$ de

x. Par [Gil1, 4.5] $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\_, E_x)$ est une dualité sur $D^b(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{A}_x))$. Les groupes de Witt triangulaires de cette catégorie sont notés $W^i(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{A}_x), \tau_x, E_x)$.

Dans [Gil1, 4.1.-4.5.] S. Gille montre que la suite spectrale associée à la filtration 5.2 est de la forme suivante :

Théorème 5.7. *Soit X un schéma noethérien et soient $\mathcal{I}_\bullet$ et $(\mathcal{A}, \tau)$ comme plus haut. On obtient une suite spectrale :*

$$E_1^{s,t}(\mathcal{A}, \tau, \mathcal{I}_\bullet) = \bigoplus_{x \in X^{(s)}} W^t(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{A}_x), \tau_x, E_x) \Rightarrow \widetilde{W}^{s+t}(\mathcal{A}, \tau, \mathcal{I}_\bullet) \tag{5.3}$$

Remarque 5.8. *1. S'il n'y a pas d'ambigüité par rapport à l'algèbre avec involution $(\mathcal{A}, \tau)$ et le complexe dualisant $\mathcal{I}_\bullet$, on écrit $E_1^{s,t}$ au lieu de $E_1^{s,t}(\mathcal{A}, \tau, \mathcal{I}_\bullet)$.*

2. Si $\mathcal{I}_\bullet$ est une résolution d'un $\mathcal{O}_X$-module localement libre $\mathcal{L}$ de rang 1, alors on écrit $E_1^{s,t}(\mathcal{A}, \tau, \mathcal{L})$ au lieu de $E_1^{s,t}(\mathcal{A}, \tau, \mathcal{I}_\bullet)$.

3. Si X est régulier et si $\mathcal{I}_\bullet$ est une résolution injective de $\mathcal{O}_X$, le groupe de Witt $W^i(\mathcal{A}, \tau, \mathcal{I}_\bullet)$ coïncide avec le i-ième groupe de Witt dérivé usuel de $(\mathcal{A}, \tau)$, considéré en [BP] (cf. lemme 5.6 et autour, et [Gil1, 2.10]).

4. Si X est régulier, $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X$, τ l'involution triviale et $\mathcal{I}_\bullet$ une résolution injective de $\mathcal{O}_X$, on obtient la suite spectrale construite dans [BW, Th. 7.2] :

$$E_1^{s,t}(\mathcal{O}_X) = \bigoplus_{x \in X^{(s)}} W^t(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{O}_x)) \Rightarrow W^{s+t}(\mathcal{O}_X).$$

où l'on a des isomorphismes $W^t(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{O}_x)) \simeq W^{s+t}(K^b_{lf}(\mathcal{P}(\mathcal{O}_x)))$ pour $x \in X^{(s)}$ puisque dans ce cas $\mathcal{O}_x$ est un anneau de dimension s.

5. Supposons que X est de Gorenstein maintenant. Alors tout fibré en droites sur X a une résolution injective. On voit que les termes $E_1^{s,t}$ sont indépendants du fibré en droites choisi ; ils sont tous (non canoniquement) isomorphes à une somme indexée sur les points x de codimension p de groupes de Witt d'espaces hermitiens ou anti-hermitiens sur $(\mathcal{A}_{k(x)}, \tau_{k(x)})$. Plus précisément, les lignes impaires de la suite spectrale sont nulles, les lignes paires $2q$ sont égales au complexe de Gersten-Witt hermitien

$$\bigoplus_{x \in X^{(0)}} W^+(\mathcal{A}_{k(x)}, \tau_{k(x)}) \xrightarrow{(d_\mathcal{L})_1^{0,0}} \bigoplus_{x \in X^{(1)}} W^+(\mathcal{A}_{k(x)}, \tau_{k(x)}) \xrightarrow{(d_\mathcal{L})_1^{1,0}} \dots \xrightarrow{(d_\mathcal{L})_1^{n-1,0}} \bigoplus_{x \in X^{(n)}} W^+(\mathcal{A}_{k(x)}, \tau_{k(x)}) \longrightarrow 0$$

si q est pair, et au complexe de Gersten-Witt anti-hermitien

$$\bigoplus_{x \in X^{(0)}} W^-(\mathcal{A}_{k(x)}, \tau_{k(x)}) \xrightarrow{(d_\mathcal{L})_1^{0,-2}} \bigoplus_{x \in X^{(1)}} W^-(\mathcal{A}_{k(x)}, \tau_{k(x)}) \xrightarrow{(d_\mathcal{L})_1^{1,-2}} \dots \xrightarrow{(d_\mathcal{L})_1^{n-1,-2}} \bigoplus_{x \in X^{(n)}} W^-(\mathcal{A}_{k(x)}, \tau_{k(x)}) \longrightarrow 0$$

si q est impair.

Par contre, les flèches de résidu de cette suite spectrale dépendent du fibré en droites choisi.

5.2.4 La suite spectrale et l'équivalence de Morita

Supposons maintenant que l'on se trouve dans la situation suivante : soit $X = \operatorname{Spec} R$ un schéma (noethérien), affine, de Gorenstein, connexe et de dimension de Krull finie n, et soient (A, τ) et (B, ν) deux algèbres d'Azumaya à involutions de première espèce sur X. Soit, de plus, P un A-module fidèlement projectif (cf. définition 2.1) et $h : P \xrightarrow{\sim} P^\sharp := \overline{\operatorname{Hom}_A(P, A)}$ un (A, τ)-espace ϵ_0-hermitien où $\epsilon_0 \in \{\pm 1\}$.

Soit $u : Z \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé de Gorenstein défini par un idéal $\mathfrak{a} \subset R$, i.e. $Z = \operatorname{Spec} R/\mathfrak{a}$. Notons P_Z et h_Z les restrictions de P et h à Z. Considérons alors la condition suivante :

Condition 5.9. *Le triplet (Z, P_Z, h_Z) satisfait à :*

1. $B/\mathfrak{a} \simeq \operatorname{End}_{A/\mathfrak{a}}(P_Z)$,
2. $\nu/\mathfrak{a}$ *est l'involution adjointe sur* $B/\mathfrak{a}$ *définie par*
$$(\nu/\mathfrak{a})(g) := h_Z^{-1} \circ g^\flat \circ h_Z,$$
où $g^\flat = \operatorname{Hom}_{A/\mathfrak{a}}(g, A/\mathfrak{a})$, *voir section 2.3.1.*

Notons comme plus haut $I_\bullet$ un complexe dualisant de X. On peut supposer qu'il est une résolution injective du R-module R, comme R est de Gorenstein, et qu'il est de la forme :

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_{-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_n \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

avec I_i en degré i.

Théorème 5.10. *Soit $p \leq n$. Supposons que pour tout sous-ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_s\} \subset X^{(t)}$ avec $t \geq p$ et $s \in \mathbb{N}$,*

1. *le schéma $Z^t_{1,\ldots,s} := \overline{\{x_1\}} \cup \ldots \cup \overline{\{x_s\}}$ avec la structure de sous-schéma réduite induite est de Gorenstein et que*
2. *le triplet $(Z^t_{1,..,s}, P_{Z_{1,\ldots,s}}, h_{Z_{1,\ldots,s}})$ satisfait à la condition 5.9.*

Alors, pour tout $q \in \mathbb{Z}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
\bigoplus\limits_{x \in X^{(p)}} W^q_{A_x,\tau_x} & \xrightarrow{d_1^{p,q}} & \bigoplus\limits_{x \in X^{(p+1)}} W^q_{A_x,\tau_x} & \xrightarrow{d_1^{p+1,q}} & \ldots & \xrightarrow{d_1^{n-1,q}} & \bigoplus\limits_{x \in X^{(n)}} W^q_{A_x,\tau_x} \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr & & & & \wr \downarrow \\
\bigoplus\limits_{x \in X^{(p)}} W^{q+1-\epsilon_0}_{B_x,\nu_x} & \xrightarrow{d_1^{p,q+1-\epsilon_0}} & \bigoplus\limits_{x \in X^{(p+1)}} W^{q+1-\epsilon_0}_{B_x,\nu_x} & \xrightarrow{d_1^{p+1,q+1-\epsilon_0}} & \ldots & \xrightarrow{d_1^{n-1,q+1-\epsilon_0}} & \bigoplus\limits_{x \in X^{(n)}} W^{q+1-\epsilon_0}_{B_x,\nu_x},
\end{array}$$

où pour $x \in X^{(i)}$

$$W^q_{A_x,\tau_x} := W^q(\mathcal{M}_{lf}(A_x), \tau_x, E_x) \quad \text{et} \quad W^q_{B_x,\nu_x} := W^q(\mathcal{M}_{lf}(B_x), \nu_x, E_x)$$

avec $E_x = (I_{-i})_x$. Dans ce diagramme les flèches horizontales sont les différentielles de la suite spectrale $E_1^{s,t}(A, \tau, R)$ (respectivement $E_1^{s,t}(B, \nu, R)$) introduite dans la section 5.2.1 et les flèches verticales sont les homomorphismes *induits sur les termes de ces suites spectrales par les foncteurs de dévissage* $(u^A_{\overline{\{x\}}*}, \eta^A)$ $(u^B_{\overline{\{x\}}*}, \eta^B)$ *et le foncteur* $\mathrm{F}_{(\overline{\{x\}}, P_{\overline{\{x\}}}, h_{\overline{\{x\}}})}$ *pour* $x \in X$*, où* $u_{\overline{\{x\}}} : \overline{\{x\}} \hookrightarrow X$ *est l'immersion fermée. Voir l'annexe A pour la définition de ces flèches.*

Démonstration. Voir l'annexe A. □

Remarque 5.11. *La condition que* X *ou les sous-schémas* $Z^t_{1,\ldots,s}$ *soient de Gorenstein n'est probablement pas nécessaire mais elle facilite les arguments et les notations, voir la remarque A.10. De plus, on n'a besoin de ce théorème que sous la forme énoncée.*

5.3 La suite spectrale de S. Gille pour les schémas à involution de deuxième espèce

Cette section expose un cas très particulier de la suite spectrale de S. Gille présentée dans [Gil2]. S. Gille présente une suite spectrale pour une algèbre d'Azumaya A à involution de deuxième espèce sur un schéma régulier, noethérien X de dimension de Krull finie. Dans notre exposition, on se borne au cas où $A = \mathcal{O}_X$, puisque c'est le seul dont on ait besoin.

Convention. *Comme dans la section précédente, on suppose dans cette section que tous les schémas sont des* $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$*-schémas noethériens.*

5.3.1 Groupes de Witt cohérents

Soit X un schéma admettant un complexe dualisant $\mathcal{I}_\bullet$. Rappelons que ceci veut dire que $\mathcal{I}_\bullet \in D^b_c(\mathcal{M}_{qc}(X))$ est un complexe de $\mathcal{O}_X$-modules injectifs et que le morphisme naturel

$$\varpi^{\mathcal{I}}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}_\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_\bullet, \mathcal{I}_\bullet), \mathcal{I}_\bullet)$$

est un quasi-isomorphisme pour tout $\mathcal{F}_\bullet \in D^b_c(\mathcal{M}(X))$. Observons que tout schéma de Gorenstein (donc en particulier tout schéma régulier) de dimension de Krull finie admet un tel complexe : en fait tout $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1 a une résolution injective finie. Un tel $\mathcal{I}_\bullet$ a alors la propriété que le foncteur

$$\mathcal{D}_{\mathcal{I}} : \mathcal{F}_\bullet \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_\bullet, \mathcal{I}_\bullet)$$

est une dualité 1-exacte sur $D^b_c(\mathcal{M}(X))$. Supposons maintenant que X est muni d'une involution de deuxième espèce ι (i.e. un automorphisme avec $\iota^{-1} = \iota$). Dans ce cas, on peut définir une dualité 1-exacte sur $D^b_c(\mathcal{M}(X))$ comme suit :

$$\mathcal{D}^{(\mathcal{O}_X, \iota)}_{\mathcal{I}} : \mathcal{F}_\bullet \mapsto \overline{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_\bullet, \mathcal{I}_\bullet)}$$

Observons que le morphisme de double dual $\varpi^{\mathcal{I}}$ est dans les deux cas le même. On obtient ainsi une catégorie triangulée avec dualité $(D^b_c(\mathcal{M}(X)), \mathcal{D}^{(\mathcal{O}_X,\iota)}_{\mathcal{I}}, 1, \varpi^{\mathcal{I}})$ dans le sens de Balmer [Ba1].

Définition 5.12. Les i-èmes groupes de Witt de la catégorie triangulée avec dualité $(D^b_c(\mathcal{M}(X)), \mathcal{D}^{(\mathcal{O}_X,\iota)}_{\mathcal{I}}, 1, \varpi^{\mathcal{I}})$ sont notés $\widetilde{W}^i(\mathcal{O}_X, \iota, \mathcal{I})$, et ils sont appelés groupes de Witt *cohérents.*

5.3.2 Comparaison avec groupes de Witt usuels

Soit X maintenant un schéma de Gorenstein de dimension de Krull finie à involution de deuxième espèce ι et soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur X (i.e. un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1). Dans ce cas, on peut construire trois différents "types" de groupes de Witt. Pourtant, sous des hypothèses raisonnables, ces groupes sont tous isomorphes.

Le groupe de Witt cohérent : Comme X est de Gorenstein de dimension de Krull finie, $\mathcal{L}$ a une résolution injective finie par $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents, $\mathcal{I}_\bullet$:

$$\mathcal{I}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{I}_1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{-n+1}} \mathcal{I}_{-n} \longrightarrow 0,$$

avec $\mathcal{I}_{-j} \in \mathcal{M}(X)$. On considère $\mathcal{I}_\bullet$ comme objet de la catégorie dérivée $D^b_c(\mathcal{M}_{qc}(X))$, tel que $\mathcal{I}_0$ se trouve en dégré zéro. Le complexe $\mathcal{I}_\bullet$ est bien un complexe dualisant de X, et les groupes de Witt cohérents correspondants sont notés $\widetilde{W}^i(\mathcal{O}_X, \iota, \mathcal{L})$. Ce groupe est donc le i-ième groupe de Witt de la catégorie dérivée avec dualité $(D^b_c(\mathcal{M}(X)), \mathcal{D}^{(\mathcal{O}_X,\iota)}_{\mathcal{I}}, 1, \varpi^{\mathcal{I}})$.

Le groupe de Witt dérivé usuel : Le foncteur contravariant $\mathcal{D}^{(\mathcal{A},\tau)}_{\mathcal{L}} := \overline{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\_, \mathcal{L})}$ est une dualité sur $D^b(\mathcal{P}(X))$. On note les groupes de Witt triangulaires de cette catégorie avec dualité $W^i(\mathcal{O}_X, \iota, \mathcal{L})$. Ce groupe est donc le i-ième groupe de Witt de la catégorie dérivée avec dualité $(D^b(\mathcal{P}(X)), \mathcal{D}^{(\mathcal{O}_X,\iota)}_{\mathcal{L}}, 1, \varpi^{\mathcal{L}})$.

Le groupe de Witt classique : Enfin on dispose des groupes de Witt usuels des formes hermitiennes et anti-hermitiennes de l'algèbre à involution $(\mathcal{O}_X, \iota)$, $W^+(\mathcal{O}_X, \iota)$ et $W^-(\mathcal{O}_X, \iota)$, voir [Kn, I.10.1] ou la section 2.3.3. Ces deux groupes sont donc les groupes de Witt de formes hermitiennes et anti-hermitiennes de la catégorie additive avec dualité $(\mathcal{P}(X), \mathcal{D}^{(\mathcal{O}_X,\iota)}_{\mathcal{O}_X}, \varpi^{\mathcal{O}_X})$.

Maintenant, comme X est de Gorenstein, on a toujours un homomorphisme entre les deux premiers groupes de Witt : $W^i(\mathcal{O}_X, \iota, \mathcal{L}) \longrightarrow \widetilde{W}^i(\mathcal{O}_X, \iota, \mathcal{L})$ qui dépend d'un choix d'un quasi-isomorphisme $\gamma : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{I}_\bullet$. Si X est régulier, cet homomorphisme est un isomorphisme, cf. [Gil2, 3.9]. De plus, comme $\mathcal{A}$ est une algèbre d'Azumaya, on peut comparer le deuxième et le troisième groupe de Witt. On a alors pour le fibré en droites trivial $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ les isomorphismes suivants :

$$W^i(\mathcal{O}_X, \iota, \mathcal{O}_X) \approx \begin{cases} W^+(\mathcal{O}_X, \iota) & \text{si } i \equiv 0 \mod 4\,; \\ W^-(\mathcal{O}_X, \iota) & \text{si } i \equiv 2 \mod 4. \end{cases}$$

voir [Ba2, Th. 4.3].

5.3.3 Construction de la suite spectrale

Soit X un schéma de dimension de Krull finie n, admettant un complexe dualisant $\mathcal{I}_\bullet$, cf. section 5.3.1. Soit $\mu_\mathcal{I} : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ la fonction codimension correspondante, cf. [Ha, Ch. V]. Quitte à translater le complexe $\mathcal{I}_\bullet$, on peut supposer que $\min(\mu_\mathcal{I}) = 0$ et $\max(\mu_\mathcal{I}) = n$. Dans le cas où X est un schéma de Gorenstein, $\mu_\mathcal{I}$ correspond à la codimension usuelle (i.e. on a $\mu_\mathcal{I}(x) = p$ pour $x \in X$ si $\mathrm{codim}_X(\overline{\{x\}}) = p$). Supposons alors que, pour un certain $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{I}_\bullet$ est de la forme :

$$\mathcal{I}_0 \longrightarrow \mathcal{I}_{-1} \longrightarrow ... \longrightarrow \mathcal{I}_{-n} \longrightarrow 0,$$

où le terme $\mathcal{I}_{-i}$ se situe en degré i. On a une filtration finie de $D^b_c(\mathcal{M}(X))$ associée à $\mu_\mathcal{I}$. Notons $D^p_{X,\mathcal{I}} = D^b_c(\mathcal{M}(X))^{(p)}$ la sous-catégorie pleine de $D^b_c(\mathcal{M}(X))$ dont les objets sont des complexes $\mathcal{F}_\bullet$ tels que $\mu_\mathcal{I}(x) \geq p$ pour tout x dans le support homologique de $\mathcal{F}_\bullet$. On a alors une filtration :

$$D^b_c(\mathcal{M}(X)) = D^0_{X,\mathcal{I}} \supseteq D^{m+1}_{X,\mathcal{I}} \supseteq ... \supseteq D^{n-1}_{X,\mathcal{I}} \supseteq D^n_{X,\mathcal{I}} \supseteq (0), \tag{5.4}$$

Soit maintenant $\mathcal{O}_X$ muni d'une involution ι de deuxième espèce. Soit $x \in X$ et $\mathcal{O}_x$ l'anneau local en x et soit $\dim \mathcal{O}_x = p$. Soit $Z \subset X$ l'ensemble des points fixes sous ι, i.e. $Z := \{x \in X \mid \iota(x) = x\}$. On considère cet ensemble comme sous-ensemble de l'espace topologique de X. En localisant le complexe $\mathcal{I}_\bullet$ on obtient un complexe $(\mathcal{I}_x)_\bullet$:

$$(\mathcal{I}_0)_x \longrightarrow (\mathcal{I}_{-1})_x \longrightarrow ... \longrightarrow (\mathcal{I}_{-p})_x \longrightarrow 0,$$

avec $(\mathcal{I}_0)_x$ en degré 0. Comme X est noethérien, $\mathcal{O}_x$ est un anneau local noethérien et par conséquent $(\mathcal{I}_x)_\bullet$ est un complexe dualisant résiduel (cf. [Gil5, Sect. 1]). Donc $E_x := (\mathcal{I}_p)_x$ est une enveloppe injective du corps résiduel $k(x)$ de x. Il est bien connu (cf. [Gil5, Sect. 3]) que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\_, E_x)$ est une dualité sur $D^b(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{O}_x))$. Supposons que $x \in Z$. Dans ce cas, $\overline{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\_, E_x)}$ est une dualité sur $D^b(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{O}_x))$. Les groupes de Witt triangulaires de cette catégorie sont notés $W^i(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{O}_x), \iota_x, E_x)$.

Dans [Gil2, Sect. 5], S. Gille montre que la suite spectrale associée à la filtration 5.2 est de la forme suivante :

Théorème 5.13. *Soit X un schéma noethérien à une involution de deuxième espèce ι et soit $\mathcal{I}_\bullet$ un complexe dualisant avec les mêmes notations que plus haut. On obtient une suite spectrale :*

$$E_1^{s,t}(\mathcal{O}_X, \iota, \mathcal{I}_\bullet) = \bigoplus_{x \in Z \cap X^{(s)}} W^t(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{O}_x), \iota_x, E_x) \Rightarrow \widetilde{W}^{s+t}(\mathcal{O}_X, \iota, \mathcal{I}_\bullet). \tag{5.5}$$

Remarque 5.14.
1. *S'il n'y a pas d'ambigüité par rapport à l'algèbre avec involution ι, on écrit $E_1^{s,t}$ au lieu de $E_1^{s,t}(\mathcal{O}_X, \iota, \mathcal{I}_\bullet)$.*
2. *Si $\mathcal{I}_\bullet$ est une résolution d'un $\mathcal{O}_X$-module localement libre $\mathcal{L}$ de rang 1, alors on écrit $E_1^{s,t}(\mathcal{O}_X, \iota, \mathcal{L})$ au lieu de $E_1^{s,t}(\mathcal{O}_X, \iota, \mathcal{I}_\bullet)$.*
3. *Si X est régulier et si $\mathcal{I}_\bullet$ est une résolution injective de $\mathcal{O}_X$, le groupe de Witt $W^i(\mathcal{O}_X, \iota, \mathcal{I}_\bullet)$ coïncide avec le i-ième groupe de Witt dérivé usuel de $(\mathcal{O}_X, \iota)$, considéré en [BP] (cf. [Gil2, 3.9]).*

4. *Supposons que X est de Gorenstein maintenant. Alors tout fibré en droites sur X a une résolution injective. En choisissant différentes dualités correspondantes à différents fibrés en droites, on voit que les termes $E_1^{s,t}$ ne changent pas ; ils sont tous (non canoniquement) isomorphes à une somme indexée sur les points x de codimension p de groupes de Witt d'espaces hermitiens ou anti-hermitiens sur $(k(x), \iota_{k(x)})$. Plus précisément, les lignes impaires de la suite spectrale sont nulles, les lignes paires $2q$ sont égales au complexe de Gersten-Witt hermitien*

$$\bigoplus_{x\in Z\cap X^{(0)}} W^+(k(x), \iota_{k(x)}) \xrightarrow{(d_{\mathfrak{L}})_1^{0,0}} \bigoplus_{x\in Z\cap X^{(1)}} W^+(k(x), \iota_{k(x)}) \xrightarrow{(d_{\mathfrak{L}})_1^{1,0}} \dots \xrightarrow{(d_{\mathfrak{L}})_1^{n-1,0}} \bigoplus_{x\in Z\cap X^{(n)}} W^+(k(x), \tau_{k(x)}) \longrightarrow 0$$

si q est pair, et au complexe de Gersten-Witt anti-hermitien

$$\bigoplus_{x\in Z\cap X^{(0)}} W^-(k(x), \iota_{k(x)}) \xrightarrow{(d_{\mathfrak{L}})_1^{0,-2}} \bigoplus_{x\in Z\cap X^{(1)}} W^-(k(x), \iota_{k(x)}) \xrightarrow{(d_{\mathfrak{L}})_1^{1,-2}} \dots \xrightarrow{(d_{\mathfrak{L}})_1^{n-1,-2}} \bigoplus_{x\in Z\cap X^{(n)}} W^-(k(x), \tau_{k(x)}) \longrightarrow 0$$

si q est impair.

Par contre, les flèches de résidu de cette suite spectrale dépendent du fibré en droites choisi.

5.4 Le cas C_n

Soit $\mathbf{G}$ un schéma en groupes semi-simples de type C_n, $n \geq 3$ sur un anneau R. Le R-schéma en groupes semi-simples simplement connexe et déployé de type C_n est $\mathbf{Sp}_{2n}$ où pour toute R-algèbre S :

$\mathbf{Sp}_{2n}(S) = \{x \in M_{2n}(S) \mid x^t\, a_0\, x = a_0\}$, $\quad a_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ étant la matrice alternée standard.

Son groupe adjoint est $\mathbf{PSp}_{2n}$. Comme tout isomorphisme du R-schéma en groupes $\mathbf{Sp}_{2n}$ est intérieur, les R-formes de $\mathbf{Sp}_{2n}$ (voire $\mathbf{PSp}_{2n}$), i.e. les schémas en groupes semi-simples sur R de type C_n ($n \geq 3$) sont classifiés à isomorphisme près par l'ensemble pointé $H^1(R, \mathbf{PSp}_{2n})$.

Soit maintenant $\mathbf{G}$ une R-forme de $\mathbf{Sp}_{2n}$. Dans le cas où $R = k$ est un corps, il y a une description de $\mathbf{G}$ en termes d'algèbres d'Azumaya (i.e. centrales simples dans ce cas) à involutions, due à Weil, voir [We]. En effet, cf. [Kne, Ch. II, 2.4], il existe une algèbre d'Azumaya A sur R avec une involution de type symplectique J (cf. définition 2.21) telle que pour toute R-algèbre S

$$\mathbf{G}(S) = \{x \in A \otimes_R S \mid xx^J = 1\}.$$

De plus, la paire (A, J) est unique à isomorphisme près. On voit sans difficulté que les arguments dans [Kne, Ch. II, 2.4] s'étendent au cas d'un anneau commutatif R [Kn, III.8.5] et que $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}(A, J)$ (cf. section 2.4). On a alors les correspondances bijectives entre les classes :

$H^1(R, \mathbf{PSp}_{2n})$

$\longleftrightarrow$

$\{R$-formes de $\mathbf{Sp}_{2n}\}$

$\longleftrightarrow$

$\{R$-formes de $\mathbf{PSp}_{2n}\}$

$\longleftrightarrow$

$\{R$-algèbres d'Azumaya A de degré $2n$, avec involution J de type symplectique$\}$.

Observons maintenant que nous avons un morphisme de suites exactes de R-groupes, i.e. un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \boldsymbol{\mu}_2 & \longrightarrow & \mathbf{Sp}_{2n} & \longrightarrow & \mathbf{PSp}_{2n} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \boldsymbol{\mu}_{2n} & \longrightarrow & \mathbf{SL}_{2n} & \longrightarrow & \mathbf{PGL}_{2n} & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

où les deux premières flèches verticales sont des inclusions. Ceci entraîne que l'on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1(R, \mathbf{PSp}_{2n}) & \xrightarrow{\partial} & H^2(R, \boldsymbol{\mu}_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(R, \mathbf{PGL}_{2n}) & \longrightarrow & H^2(R, \boldsymbol{\mu}_{2n}). \end{array}$$

La flèche horizontale de la première ligne associe à la classe d'une algèbre d'Azumaya A avec involution symplectique J, la classe de A dans le groupe de Brauer. La première flèche verticale associe à la classe d'une paire $[(A, J)]$ juste $[A]$, la classe de l'algèbre d'Azumaya sous-jacente.

Supposons maintenant que k est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit $R = k[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ notre anneau des polynômes de Laurent à deux variables sur k et soit $K = k(t_1, t_2)$ son corps de fractions.

Donc, comme $\mathrm{Pic}(R) = 0$ par le lemme 3.2, on a pour tout $m \geq 0$, ${}_m \mathrm{Br}(R) \simeq H^2(R, \boldsymbol{\mu}_m) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Par conséquent, la flèche verticale à droite dans le diagramme commutatif plus haut est l'inclusion ${}_2 \mathrm{Br}(R) \hookrightarrow {}_{2n} \mathrm{Br}(R)$. Pour démontrer la conjecture A pour $\mathbf{G}$, il suffit par la remarque 3.9(2) de montrer que $H^1(R, \widetilde{\mathbf{G}}) = 1$, où $\widetilde{\mathbf{G}}$ est le revêtement universel de $\mathbf{G}$. Notons (A, J) l'algèbre d'Azumaya avec involution symplectique correspondante à $\widetilde{\mathbf{G}}$ par les bijections plus haut.

Vu que la classe de A dans le groupe de Brauer est d'ordre 2 (cf. [Kn, III.8.4]), A est Brauer-équivalente soit à $M_{2n}(R)$, soit à $M_n(A(1, 2)) = A(n, 2n)$. Comme $n \geq 3$, le théorème 4.8 s'applique et on a le lemme suivant.

Lemme 5.15. *Soit (A, J) une algèbre à involution symplectique sur R. Alors on a soit $A \simeq M_{2n}(R)$, soit $A \simeq M_n(A(1, 2))$.*

Supposons d'abord $A \simeq M_{2n}(R)$. Selon le théorème 3.3 tout module projectif sur R est libre, donc on a par [Kn, I.4.1.3] que toute involution symplectique J sur A est conjuguée à l'involution symplectique usuelle $J_0 : x \mapsto a_0^{-1}\, x^t\, a_0$ (a_0 étant la matrice alternée standard, voir le début de cette section), i.e. on a $(A, J) \simeq (A, J_0)$ comme anneaux à involution. Donc dans ce cas la conjecture A est démontrée, comme le cas déployé a été déjà décrit dans [GP1, Th. 4.18], voir remarque 3.9.

Supposons maintenant que $A \simeq M_n(A(1,2))$. Notons $\mathcal{Q}$ l'algèbre $A(1,2)$, dont il est beaucoup fait mention par la suite. Cette algèbre $\mathcal{Q}$ est munie d'une involution standard, appelée conjugaison quaternionique, notée $a \mapsto \sigma(a)$ (ou $a \mapsto \bar{a}$) et définie de la façon suivante par descente. Sur l'algèbre des quaternions déployée $M_2(R)$ on dispose de l'involution de type symplectique définie par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Par [Kn, I.1.3.7] cette involution se descend à $\mathcal{Q}$. L'involution σ est l'unique involution de type symplectique sur $\mathcal{Q}$. Elle est aussi l'unique involution standard sur $\mathcal{Q}$, cf. [Kn, I.3.4]. On s'intéresse maintenant à décrire les involutions de type symplectique sur $A = M_n(\mathcal{Q})$. Par [KMRT, Th. 4.2] les involutions de type symplectique sur A correspondent aux formes hermitiennes régulières de rang n sur l'anneau avec involution $(\mathcal{Q}, \sigma)$ à similitude (un facteur de $R^\times$) près – bien que ce théorème s'applique au cas où R est un corps, la preuve s'adapte sans difficulté au cas d'un anneau R tel que $\mathrm{Pic}(R)$ est sans torsion. Soit P un $\mathcal{Q}$-module fidèlement projectif de rang relatif $n \geq 3$. Suivant le corollaire 4.7, P est libre. On a donc la correspondance bijective :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{involutions } J \text{ de type symplectique} \\ \text{sur } \mathrm{End}_{\mathcal{Q}}(P) \simeq M_n(\mathcal{Q}) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{formes hermitiennes régulières} \\ (P,h) \text{ sur } (\mathcal{Q},\sigma) \text{ à similitude près} \end{array} \right\}.$$

Pour démontrer la trivialité de cet ensemble, il s'agit de voir qu'étant donné M, un $\mathcal{Q}$-module fidèlement projectif de rang relatif $n \geq 3$, donc libre, et une forme hermitienne $h : M \times M \longrightarrow \mathcal{Q}$, on a :

- $(M,h) \simeq \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^{n/2})$ si n est pair
- $(M,h) \simeq \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^{n-1/2}) \perp (M', h')$ où (M', h') est un espace hermitien de dimension 1 sur $\mathcal{Q}$, si n est impair.

Ici $\mathfrak{H}(\mathcal{Q}^r)$ signifie l'espace hyperbolique de dimension $2r$ sur $\mathcal{Q}$. Il s'agit alors d'établir que toute forme hermitienne régulière (M,h) sur $(\mathcal{Q},\sigma)$ admet une telle décomposition. On démontre ce résultat en deux étapes. D'abord on calcule le groupe de Witt des formes hermitiennes sur $(\mathcal{Q},\sigma)$ et on établit ensuite une loi de simplification pour ces formes.

Lemme 5.16. *Soit $X = \mathrm{Spec}\, R$ et notons $\sigma_K = \sigma \otimes K$.*

1. *Les $(\mathcal{Q}_K, \sigma_K)$-formes hermitiennes sont classifiées à isométrie près par leur dimension, donc en particulier on a :*

$$W^+(\mathcal{Q}_K, \sigma_K) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

de générateur la classe de $(\mathcal{Q}_K, < 1 >)$.

2. *Soit* $x \in X^{(i)}$ *avec* $i = 1, 2$. *On a*

$$W^+(M_2(k(x)), \sigma_{k(x)}) = 0$$

où $\sigma_{k(x)} = \sigma \otimes k(x)$.

Démonstration. Montrons la première assertion. L'algèbre quaternionique $\mathcal{Q}_K$ est l'algèbre à division sur $K = k(t_1, t_2)$, définie par les relations $X^2 = t_1$, $Y^2 = t_2$ et $XY = -YX$ (cf. section 4.1), l'involution σ_K étant la conjugaison quaternionique. Soit (M, h) un espace hermitien de rang n sur $\mathcal{Q}_K$, i.e. on a une forme hermitienne régulière

$$h : M \times M \longrightarrow \mathcal{Q}_K .$$

En particulier on a pour tout $x \in M$, $h(x, x) = \sigma(h(x, x))$ donc $h(x, x) \in \mathrm{Fix}(\sigma) = K$, et M est un K-espace vectoriel de dimension $2n$. On sait ([Sch], 10.1, p.352) que h définit une forme quadratique $q_h : M \times M \longrightarrow K$ de rang $2n$ sur K, en posant $q_h(x) := h(x, x)$. Cette forme quadratique est appelée la forme trace associée à h ; elle est régulière si et seulement si h l'est aussi (loc. cit.). Par [Sch, 10.1.7] deux formes hermitiennes sur $(\mathcal{Q}_K, \sigma_K)$ sont isométriques si et seulement si leurs formes quadratiques associées le sont également. De plus, l'homomorphisme de groupes de Witt

$$W^+(\mathcal{Q}_K, \sigma_K) \longrightarrow W^+(K),$$

qui associe à la classe d'une forme hermitienne la classe de sa forme trace, est une injection qui a comme image l'idéal engendré par la forme quadratique, norme quaternionique $\mathrm{N} : \mathcal{Q}_K \longrightarrow K$, $x \mapsto x\sigma(x)$, i.e. $\mathrm{N} =< 1, -t_1, -t_2, t_1 t_2 >$. Soit maintenant h une forme hermitienne régulière de rang 1 sur $(\mathcal{Q}_K, \sigma_K)$. Par [Kn, I.6.2.4], toute forme hermitienne sur $(\mathcal{Q}_K, \sigma_K)$ possède une base orthogonale, donc $h =< u >$ pour $u \in \mathrm{Fix}(\sigma)^\times = K^\times$. Maintenant K est un corps C_2, donc la norme quaternionique N associée à la forme hermitienne $< 1 >$, représente tout élément de $K^\times$, i.e. est universelle. Alors $\alpha N \simeq N$ pour tout $\alpha \in K^\times$ et donc $q_{<u>} \simeq q_{<1>}$. Par [Sch, 10.1.7], $h \simeq < 1 >$ et $W^+(\mathcal{Q}_K, \sigma_K)$ est engendré par $< 1 >$. Par ailleurs, comme K est un corps C_2, toute forme quadratique de rang au moins 5 est isotrope et alors $q_{<1>} \perp q_{<1>}$ est hyperbolique ; alors $2[q_{<1>}] = 0$ dans $W^+(K)$. Ainsi, l'idéal engendré par la norme quaternionique $[\mathrm{N}] = [q_{<1>}]$ ne contient que deux éléments et donc on a $W^+(\mathcal{Q}_K, \sigma_K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En tenant compte de [Kn, I.6.4.2] (simplification de Witt sur des algèbres à division), ceci entraîne la classification des formes hermitiennes sur $\mathcal{Q}_K$ et le lemme suit.

Pour montrer la deuxième assertion, nous allons nous servir de la théorie de Morita pour les formes hermitiennes, expliquée dans [Kn, I.9.2]. Soit k' un des corps $k(x)$, $x \in X^{(i)}$ où $i = 1, 2$. Par le corollaire 2.12, appliqué avec $\epsilon = -1$, on a une équivalence de catégories

$$\mathrm{Herm}^-(k') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Herm}^+(M_2(k'), \sigma_{k'}). \tag{5.7}$$

Cette équivalence de catégories entraîne un isomorphisme de groupes de Witt

$$W^-(k') \xrightarrow{\sim} W^+(M_2(k'), \sigma_{k'}).$$

On a donc $W^+(M_2(k'), \sigma_{k'}) = W^-(k') = 0$, vu que tout k'-espace alterné est hyperbolique (cf. [Kn, I.4.1.2]). □

Remarque 5.17. *Le lemme 5.16 est aussi une conséquence de [BFP, Th. 5.1.1] qui montre que $H^1(K, \mathbf{Sp}(A_K, \tau_K)) = 1$ pour A_K une algèbre simple centrale sur K à involution symplectique τ_K.*

Théorème 5.18. *On a $W^+(\mathcal{Q}, \sigma) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de générateur la classe de $< 1 >$, où $\sigma : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}$ est l'involution standard définie plus haut (voir (5.6)).*

Démonstration. L'idée de la preuve est de comparer les deux suites spectrales suivantes : celle de (5.3) du théorème 5.7 avec $X = \operatorname{Spec} R$, $\mathcal{A} = \mathcal{Q}$, $\tau = \sigma$ et $\mathcal{I}_\bullet$ étant une résolution injective de R :

$$E_1^{s,t}(\mathcal{Q}, \sigma, R) = \bigoplus_{x \in X^{(s)}} W^t(D^b(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{Q}_x)), \sigma_x, R_x) \Rightarrow \widetilde{W}^{s+t}(\mathcal{Q}, \sigma, R). \qquad (5.8)$$

où pour tout $x \in X^{(s)}$,

$$W^t(D^b(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{Q}_x)), \sigma_x, R_x)$$
$$\approx \left\{ \begin{array}{lll} W^+(\mathcal{Q}_{k(x)}, \sigma_{k(x)}) & \text{si } t \equiv 0 & \mod 4\,; \\ W^-(\mathcal{Q}_{k(x)}, \sigma_{k(x)}) & \text{si } t \equiv 2 & \mod 4\,; \\ 0 & \text{si } t \text{ est impair,} & \end{array} \right\}$$

et ensuite la même suite spectrale avec $X = \operatorname{Spec} R$, $\mathcal{A} = R$, $\tau = \mathrm{id}$ et $\mathcal{I}_\bullet$ étant une résolution injective de R (voir remarque (5.8(4))) :

$$E_1^{s,t}(R) = \bigoplus_{x \in X^{(s)}} W^t(D^b(\mathcal{M}_{lf}(R_x)) \Rightarrow W^{s+t}(R). \qquad (5.9)$$

Selon la section 5.2.2, on a un isomorphisme $W^+(\mathcal{Q}, \sigma) \simeq \widetilde{W}^0(\mathcal{Q}, \sigma, R)$. Il s'agit de calculer le terme $E^0(\mathcal{Q}, \sigma, R)$. Ce groupe admet une filtration dont les quotients successifs sont les $E_\infty^{p,-p}$. On observe que déjà sur le deuxième niveau toutes les différentielles de cette suite spectrale sont nulles. Donc on a $E_\infty^{p,-p} = E_2^{p,-p}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. La remarque 5.8 indique que ces termes sont nuls si $p \neq 0, 2$. On va montrer que $E_2^{2,-2} = 0$ et que $E_2^{0,0} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dans ce cas, $E_2^{0,0}$ est le seul quotient non nul de la filtration de E^0 et le résultat suit.

Montrons que $E_2^{2,-2} = 0$. Soient $x_1, ..., x_m \in X^{(1)}$, où $m \in \mathbb{N}$. Observons d'abord que le schéma $Z_{1,...,m} = \overline{\{x_1\}} \cup ... \cup \overline{\{x_n\}}$ est de Gorenstein par [Ei, Cor.21.19], comme toute intersection d'idéaux premiers de hauteur 1 dans R est un idéal principal par [Ma, Ch. 20, Rem. 2], donc engendrée par une suite régulière. Ensuite $\mathrm{Br}(Z_{1,...,m}) = 0$ par le théorème 2.5, comme les corps $k(x_1), ..., k(x_m)$ sont de dimension cohomologique 1. Donc $\mathcal{Q}_Z$ est l'algèbre d'endomorphismes d'un fibré vectoriel, et en fait une algèbre de matrices, puisque

$\mathcal{Q} \simeq R^4$ comme R-modules. Soit maintenant $P = R^2$ et $h_0 : P \times P \longrightarrow R$ la forme alternée standard sur R, i.e. $h_0((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$. Le corollaire 2.12 montre alors que le triplet $(Z_{1,\ldots,m}, P_{Z_{1,\ldots,m}}, (h_0)_{Z_{1,\ldots,m}})$ satisfait à la condition 5.9 avec $(A, \tau) = (R, \mathrm{id})$ et $(B, \nu) = (\mathcal{Q}, \sigma)$. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
E_1^{1,0}(R) \arrow[d, equal] & & E_1^{2,0}(R). \arrow[d, equal] & \\
\bigoplus_{x \in X^{(1)}} W^0(D^b(\mathcal{M}_{lf}(R_x)) \arrow[rr, "d"] \arrow[d, "Morita"', "\wr"] & & \bigoplus_{x \in X^{(2)}} W^0(D^b(\mathcal{M}_{lf}(R_x)). \arrow[d, "\wr", "Morita"'] & \\
\bigoplus_{x \in X^{(1)}} W^{-2}(D^b(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{Q}_x)), \sigma_x, R_x) \arrow[rr, "d_1^{1,-2}"] \arrow[d, equal] & & \bigoplus_{x \in X^{(2)}} W^{-2}(D^b(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{Q}_x)), \sigma_x, R_x) \arrow[r, "d_1^{2,-2}"] \arrow[d, equal] & 0. \\
E_1^{1,-2}(\mathcal{Q}, \sigma, R) & & E_1^{2,-2}(\mathcal{Q}, \sigma, R) &
\end{tikzcd}$$

Pour montrer que $E_2^{2,-2} = 0$, il s'agit de montrer que la différentielle $d_1^{1,-2}$ est surjective. Par la commutativité du diagramme précédent, il suffit de montrer que la différentielle d est surjective. On sait que $\operatorname{coker}(d) = E_2^{2,0} = W^2(R)$, comme les termes $E_2^{s,t}$ tels que $s + t = 2$ sont tous zéros pour $s \neq 0$ et $t \neq 2$, cf. l'exposition de la suite spectrale dans [BW]. Mais par la section 5.2.2 on a $W^2(R) = W^-(R)$. En tenant compte de [Kn, I.4.1.2], tout espace alterné sur R est hyperbolique, donc $\operatorname{coker}(d) = E_2^{0,2} = W^2(R) = 0$ et d est surjective. Donc on a bien $E_2^{2,-2} = 0$.

Montrons maintenant que $E_2^{0,0} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Observons que $\ker(d_1^{0,0}) = E_2^{0,0}$ où

$$W^+(\mathcal{Q}_K, \sigma_K) \xrightarrow{d_1^{0,0}} \bigoplus_{x \in X^{(1)}} W^+(\mathcal{Q}_{k(x)}, \sigma_{k(x)}).$$

Comme $E_2^{2,-2} = 0$, on voit que $E_2^{0,0} \simeq W^+(\mathcal{Q}, \sigma)$ et donc on a une suite exacte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W^+(\mathcal{Q}, \sigma) \arrow[r] & W^+(\mathcal{Q}_K, \sigma_K) \arrow[r, "d_1^{0,0}"] \arrow[d, equal] & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} W^+(\mathcal{Q}_{k(x)}, \sigma_{k(x)}). \arrow[d, equal] \\
& & E_1^{0,0} & E_1^{1,0}
\end{tikzcd}$$

i.e. on a la pureté pour les groupes de Witt de formes hermitiennes[1] sur R. Comme $\mathrm{Br}(k(x)) = 0$ pour $x \in X^{(1)}$, on a $\mathcal{Q}_{k(x)} \simeq M_2(k(x))$. Donc par le

[1]Pureté pour les groupes de Witt de formes hermitiennes sur une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ à involution de première espèce τ sur un schéma X est l'exactitude du complexe de Gersten-Witt hermitien, i.e. du complexe

$$0 \longrightarrow W^+(\mathcal{A}_{k(x)}, \tau_{k(x)}) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(0)}} W^+(\mathcal{A}_{k(x)}, \tau_{k(x)}) \xrightarrow{d_1^{0,0}} \ldots \xrightarrow{d_1^{n-1,0}} \bigoplus_{x \in X^{(n)}} W^+(\mathcal{A}_{k(x)}, \tau_{k(x)}) \longrightarrow 0,$$

dans le terme $\bigoplus_{x \in X^{(0)}} W^+(\mathcal{A}_{k(x)}, \tau_{k(x)})$.

lemme 5.16, on a $E_1^{1,0} = 0$. Il suit que $W^+(\mathcal{Q}, \sigma) \simeq W^+(\mathcal{Q}_K, \sigma_K)$. Comme on a $W^+(\mathcal{Q}_K, \sigma_K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par le lemme 5.16, le théorème suit. □

Il reste à établir des conditions pour la simplification des $(\mathcal{Q}, \sigma)$-formes hermitiennes.

Théorème 5.19. *Soit $n \geq 6$. Alors toute forme hermitienne (M, h) sur $(\mathcal{Q}, \sigma)$, avec M un $\mathcal{Q}$-module fidèlement projectif de rang relatif n, se décompose :*

1. *$(M, h) \simeq \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^r)$ si $n = 2r$ est pair,*
2. *$(M, h) \simeq \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^r) \perp (\mathcal{Q}, < 1 >)$ si $n = 2r + 1$ est impair.*

Démonstration. Supposons que (M, h) est un espace hermitien de rang relatif pair $2r$. Comme la preuve est analogue pour le cas où (M, h) est de rang impair, on se limite au cas pair. Supposons que $r \geq 3$. Par le théorème 5.18, la classe de (M, h) dans $W^+(\mathcal{Q}, \sigma)$ est triviale. Par [Kn, I.3.5.4] tout espace hermitien est un facteur direct d'un espace hyperbolique d'un module libre. De plus tout $\mathcal{Q}$-module projectif de rang ≥ 3 est libre par le corollaire 4.7, donc il existe $s \geq 0$ tel que

$$(M, h) \perp \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^s) \simeq \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^{r+s}). \tag{5.10}$$

Rappelons que $d := \dim \operatorname{Spm} R = 2$ par le lemme 2.14. Puisque $r \geq d + 1 = 3$, on peut appliquer le théorème 2.16 pour déduire que

$$(M, h) \simeq \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^r),$$

ce qui donne le résultat. □

Corollaire 5.20. *Supposons que $n \geq 6$ et que $\mathbf{G}$ est un schéma en groupes semi-simples (connexe) de type C_n sur R. Soit $\boldsymbol{\mu}$ le noyau du revêtement universel $\tilde{\mathbf{G}} \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbf{G}$. Alors l'homomorphisme connectant*

$$H^1(R, \mathbf{G}) \longrightarrow H^2(R, \boldsymbol{\mu})$$

est bijectif. En particulier, la conjecture A est vraie pour $\mathbf{G}$.

Démonstration. Soit (A, τ) l'algèbre d'Azumaya à involution symplectique correspondante à $\mathbf{G}$. On va montrer que $H^1(R, \mathbf{Sp}(A, \tau)) = 1$. Vu que la surjectivité de la flèche $H^1(R, \mathbf{G}) \longrightarrow H^2(R, \boldsymbol{\mu})$ est déjà connue, ceci entraîne sa bijectivité. Rappelons la description de l'ensemble $H^1(R, \mathbf{Sp}(A, \tau))$, donnée dans la proposition 2.29 :

$$H^1(R, \mathbf{Sp}(A, \tau)) \leftrightarrow \mathbf{Sym}(A, \tau)^\times(R) / \sim$$

où $\mathbf{Sym}(A, \tau)^\times(R) = \operatorname{Sym}(A, \tau)^\times$, l'ensemble des éléments symétriques inversibles de (A, τ), et où $s \sim s' \Leftrightarrow s = a \cdot s' \cdot \tau(a)$ pour un certain $a \in A^\times$.

Soit donc $s \in \operatorname{Sym}(A, \tau)^\times$. On veut montrer que $s \sim 1$. On sait que $\tau = int(u) \circ \sigma^t$ pour un $u \in \operatorname{Sym}(A, \sigma^t)^\times$ où σ^t désigne l'extension par transposition de l'involution standard σ de $\mathcal{Q}$ à $M_n(\mathcal{Q})$. Alors $\sigma(u)^t = u$, et de plus

$$u^{-1}\, s = u^{-1}\, \tau(s) = u^{-1}\, u\, \sigma(s)^t\, u^{-1} = \sigma(s)^t\, u^{-1} = \sigma(u^{-1}\, s)^t.$$

Donc $u^{-1}\, s \in \mathrm{Sym}(A, \sigma^t)$ et il suit que s définit la forme hermitienne suivante sur $(\mathcal{Q}, \sigma)$:

$$h\ : \mathcal{Q}^n \times \mathcal{Q}^n \longrightarrow \mathcal{Q}, \qquad (x, y) \mapsto \sigma(x)^t \cdot u^{-1} s \cdot y.$$

En faisant appel à la classification des formes hermitiennes sur $(\mathcal{Q}, \sigma)$ (i.e. les théorèmes 5.18 et 5.19) les formes définies par u^{-1} et $u^{-1}s$ sont isométriques. Il existe alors $a \in A^\times$ tel que $u^{-1}s = au^{-1}\sigma(a)^t$, donc

$$s = u\, a\, u^{-1}\sigma(a)^t = u\, a\, u^{-1}\tau(u\, a\, u^{-1}),$$

ce qui montre que $s \sim 1$. On a bien montré que $H^1(R, \mathbf{Sp}(A, \tau))$ est trivial. $\square$

5.5 Les autres groupes du type D_n

La conjecture A a été démontrée dans la section 4.2, cf. le corollaire 4.13, pour les groupes de spineurs et les groupes spéciaux orthogonaux d'une forme quadratique de rang ≥ 5. Dans cette section on traite le cas des groupes de type D_n qui ne sont pas de cette forme.

Soit R un anneau (commutatif) avec $\operatorname{Spec} R$ connexe et $2 \in R^\times$. Soit $\mathbf{G}$ un R-schéma en groupes semi-simples (connexe) de type D_n, $n \geq 4$. On rappelle que le groupe semi-simple simplement connexe déployé de type D_n est $\mathbf{Spin}_{2n} := \mathbf{Spin}(q)$, le groupe des spineurs associé à la forme quadratique régulière $q = \mathfrak{H}^n(R)$. Le centre de $\mathbf{Spin}_{2n}$ est $\boldsymbol{\mu}_4$ si n est impair et $\boldsymbol{\mu}_2 \times \boldsymbol{\mu}_2$ si n est pair. Le groupe adjoint de $\mathbf{Spin}_{2n}$ est $\mathbf{PSO}_{2n}$. Si n est impair, le quotient de $\mathbf{Spin}_{2n}$ par son sous-groupe $\boldsymbol{\mu}_2$ est le groupe spécial orthogonal $\mathbf{SO}_{2n}$. Pour obtenir $\mathbf{SO}_{2n}$ si n est pair, on quotiente $\mathbf{Spin}_{2n}$ par son sous-groupe $\boldsymbol{\mu}_2$ qui se factorise en $\boldsymbol{\mu}_2 \xrightarrow{i} \boldsymbol{\mu}_2 \times \boldsymbol{\mu}_2$, où $i(1) = (1, 1)$, cf. [KMRT, p.375]. De plus, le groupe d'automorphismes de $\mathbf{Spin}_{2n}$ (et donc de $\mathbf{SO}_{2n}$) est $\mathbf{PO}_{2n} := \mathrm{Ad}(\mathbf{O}_{2n})$, le groupe quotient de $\mathbf{O}_{2n}$ par son centre. Donc $H^1(R, \mathbf{PO}_{2n})$ classifie les R-formes de $\mathbf{Spin}_{2n}$, $\mathbf{SO}_{2n}$ ou $\mathbf{PSO}_{2n}$ à isomorphisme près.

Soit maintenant $\mathbf{G}$ une R-forme de $\mathbf{SO}_{2n}$. Dans le cas où $R = k$ est un corps, il existe une description de $\mathbf{G}$ en termes d'algèbres d'Azumaya (i.e. centrales simples dans ce cas) à involutions, due à Weil, voir [We]. En effet, cf. [Kne, Ch. II, 2.4], il existe une algèbre d'Azumaya A sur R avec une involution de type symplectique J (cf. définition 2.21) telle que pour toute R-algèbre S

$$\mathbf{G}(S) = \{x \in A \otimes_R S \mid xx^I = 1 \text{ et } \mathrm{Nrd}(x) = 1\}.$$

De plus, la paire (A, I) est unique à isomorphisme près. On voit sans difficulté que les arguments dans [Kne, Ch. II, 2.4] s'étendent au cas d'un anneau commutatif R [Kn, III.8.5] et que $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(A, I)$ (cf. section 2.4). On a alors les correspondances bijectives entre les classes :

$$H^1(R, \mathbf{PO}_{2n})$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\{R\text{-formes de } \mathbf{Spin}_{2n}\}$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\{R\text{-formes de } \mathbf{SO}_{2n}\}$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\{R\text{-formes de } \mathbf{PSO}_{2n}\}$$

$$\longleftrightarrow$$

$\{R$-algèbres d'Azumaya A de degré $2n$, avec involution I de type orthogonal$\}$.

Observons maintenant que nous avons un morphisme de suites exactes, i.e. un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \boldsymbol{\mu}_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{O}_{2n} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{PO}_{2n} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{G}_{\mathbf{m}} \arrow[r] & \mathbf{GL}_{2n} \arrow[r] & \mathbf{PGL}_{2n} \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

où les deux premières flèches verticales sont des inclusions. Ceci entraîne que l'on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^1(R, \mathbf{PO}_{2n}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & H^2(R, \boldsymbol{\mu}_2) \arrow[d] \\
H^1(R, \mathbf{PGL}_{2n}) \arrow[r] & H^2(R, \mathbb{G}_{\mathbf{m}}).
\end{tikzcd}$$

Supposons que $\operatorname{Pic}(R) = 0$. Alors la flèche horizontale de la première ligne associe à la classe d'une algèbre d'Azumaya A avec involution orthogonale I, la classe de A dans le groupe de Brauer. La première flèche verticale associe à la classe d'une paire $[(A, I)]$ juste $[A]$, la classe de l'algèbre d'Azumaya sous-jacente.

Supposons maintenant que k est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit $R = k[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ notre anneau des polynômes de Laurent à deux variables sur k et soit $K = k(t_1, t_2)$ son corps de fractions.

Donc, comme on a bien $\operatorname{Pic}(R) = 0$ par le théorème 3.3 la flèche verticale à droite dans le diagramme commutatif plus haut est l'inclusion ${}_2\operatorname{Br}(R) \hookrightarrow \operatorname{Br}(R)$. Pour démontrer la conjecture A pour $\mathbf{G}$, il suffit par la remarque 3.9(2) de montrer que $H^1(R, \widetilde{\mathbf{G}}) = 1$, où $\mathbf{G}$ est le revêtement universel de $\mathbf{G}$. Notons (A, I) l'algèbre d'Azumaya avec involution orthogonale correspondante à $\widetilde{\mathbf{G}}$ par les bijections plus haut.

Vu que la classe de A dans le groupe de Brauer est d'ordre 2 (cf. [Kn, III.8.4]), A est Brauer-équivalente soit à $M_{2n}(R)$, soit à $M_n(A(1,2)) = A(n, 2n)$. Comme $n \geq 4$, le théorème 4.8 s'applique et on a le lemme suivant :

Lemme 5.21. *Soit (A, I) une algèbre à involution orthogonale sur R. Alors on a soit $A \simeq M_{2n}(R)$, soit $A \simeq M_n(A(1,2))$.*

Supposons d'abord $A \simeq M_{2n}(R)$. Dans ce cas une involution I sur A correspond à une forme quadratique régulière q de rang $2n$ sur R. Dans ce cas $\widetilde{\mathbf{G}} = \mathbf{Spin}(q)$, le groupe des spineurs d'une R-forme quadratique q de rang ≥ 5, et on a alors $H^1(R, \widetilde{\mathbf{G}}) = 1$ par le corollaire 4.13.

Supposons maintenant que $A \simeq M_n(A(1,2))$. Notons $\mathcal{Q} := A(1,2)$ comme dans la section 5.4. Cette algèbre est munie d'une involution standard σ, la conjugaison quaternionique, voir section 5.4. Par [KMRT, Th. 4.2] les involutions de type orthogonal sur A correspondent aux formes anti-hermitiennes régulières de rang n sur l'anneau avec involution $(\mathcal{Q}, \sigma)$ à similitude (un facteur de $R^\times$) près – comme on l'a déjà remarqué dans le cas des groupes symplectiques, ce théorème s'applique au cas où R est un corps, mais la preuve s'adapte sans difficulté au cas d'un anneau R tel que $\mathrm{Pic}(R)$ est sans torsion. Soit P un $\mathcal{Q}$-module fidèlement projectif de rang relatif $n \geq 3$. Suivant le corollaire 4.7, P est libre. On a donc la correspondance bijective :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{involutions } I \text{ de type orthogonal} \\ \text{sur } \mathrm{End}_{\mathcal{Q}}(P) \simeq M_n(\mathcal{Q}) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{formes anti-hermitiennes régulières} \\ (P, h) \text{ sur } (\mathcal{Q}, \sigma) \text{ à similitude près} \end{array} \right\}.$$

On va calculer d'abord le groupe de Witt des formes anti-hermitiennes sur $(\mathcal{Q}, \sigma)$. Pour cela on se sert, comme dans la section précédente, de la suite spectrale (5.3). Ceci nous ramène à considérer les formes anti-hermitiennes sur des algèbres de quaternions sur les corps. Observons que par [Kn, I.6.2.4], tout espace hermitien sur une algèbre à division avec involution non triviale possède une base orthogonale. On utilise librement ce fait par la suite.

Lemme 5.22. *Soit $X = \mathrm{Spec}\, R$ et $x \in X^{(1)}$. On a :*

$$W^-(M_2(k(x)), \sigma_{k(x)}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus k(x)^\times / k(x)^{\times 2}$$

où $\sigma_{k(x)} = \sigma \otimes k(x)$. Ce groupe est engendré par $< 1 >$ et les espaces $< 1, -\alpha >$, où $\alpha \in M_2(k(x))^\times$ est tel que $\det(\alpha) \notin k(x)^2$.

Démonstration. Comme dans le cas des groupes symplectiques (lemme 5.16), on se sert de la théorie de Morita pour les espaces hermitiens, (cf. aussi [Sch, 10.3, p.361]). Soit donc $x \in X^{(1)}$. Par le corollaire 2.12, appliqué avec $\epsilon = 1$, on obtient une équivalence de catégories

$$\mathrm{Herm}^+(k(x)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Herm}^-(M_2(k(x)), \sigma_{k(x)}). \tag{5.11}$$

Cette équivalence des catégories entraîne un isomorphisme des groupes de Witt

$$W^+(k(x)) \xrightarrow{\sim} W^-(M_2(k(x)), \sigma_{k(x)}).$$

On a donc $W^-(M_2(k(x)), \sigma_{k(x)}) = W^+(k(x)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus k(x)^\times / k(x)^{\times 2}$, la dernière égalité étant une conséquence de [Sch, Th. 2.3.3], comme $k(x)$ est un corps C_1. ∎

Rappelons (cf. section 4.1) que $\mathcal{Q}$ est un R-module libre de base $1, X, Y, XY$ et que sa structure d'algèbre est définie par les relations :

$$X^2 = t_1,\ Y^2 = t_2 \text{ et } YX = -XY.$$

Si l'on étend les scalaires à l'anneau $S := k[t_1^{\pm\frac{1}{2}}, t_2^{\pm\frac{1}{2}}]$ l'algèbre $\mathcal{Q}$ se déploie, donc il existe un plongement

$$\mathcal{Q} \hookrightarrow \mathcal{Q} \otimes_R S \simeq M_2(S)$$

tel que

$$X \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{t_1} \end{pmatrix}, \quad Y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{t_2} \\ \sqrt{t_2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad XY \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{t_1 t_2} \\ -\sqrt{t_1 t_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est commode d'identifier les éléments X, Y, XY avec ces matrices.

Théorème 5.23. *On a $W^-(\mathcal{Q}, \sigma) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus R^\times/R^{\times 2} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^2$ de générateurs les classes des formes $< X >$, $< Y >$ et $< XY >$, où $\sigma : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}$ est l'involution standard sur $\mathcal{Q}$, définie plus haut (voir (5.6)).*

Démonstration. Comme dans la preuve du théorème 5.18, on utilise la suite spectrale (5.3) de S. Gille avec $X = \operatorname{Spec} R$, $\mathcal{A} = \mathcal{Q}$, $\tau = \sigma$ et $\mathcal{L} = R$:

$$E_1^{s,t}(\mathcal{Q}_K, \sigma, R) = \bigoplus_{x \in X^{(s)}} W^t(D^b(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{Q}_x)), \sigma_x, R_x) \Rightarrow W^{s+t}(\mathcal{Q}, \sigma, R) \qquad (5.12)$$

où pour tout $x \in X^{(s)}$,

$$W^t(D^b(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{Q}_x)), \sigma_x, R_x)$$
$$\approx \begin{cases} W^+(\mathcal{Q}_{k(x)}, \sigma_{k(x)}) & \text{si } t \equiv 0 \mod 4\,; \\ W^-(\mathcal{Q}_{k(x)}, \sigma_{k(x)}) & \text{si } t \equiv 2 \mod 4\,; \\ 0 & \text{si } t \text{ est impair.} \end{cases}$$

Par la section 5.2.2, on a un isomorphisme $W^-(\mathcal{Q}, \sigma) \simeq \widetilde{W}^2(\mathcal{Q}, \sigma, R)$. Il s'agit de calculer le terme $E^2(\mathcal{Q}, \sigma, R)$. Ce groupe admet une filtration dont les quotients successifs sont les $E_\infty^{p+2,-p}$. On observe que déjà sur le deuxième niveau toutes les différentielles dans cette suite spectrale sont nulles. Donc on a $E_\infty^{p+2,-p} = E_2^{p+2,-p}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Par la remarque 5.8, ces termes sont nuls si $p \neq 0, -2$. On va montrer que $E_2^{2,0} = 0$ et que $E_2^{0,2} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus R^\times/R^{\times 2}$.

Montrons d'abord que $E_2^{2,0} = 0$. Les différentielles suivantes font partie de la ligne $t = 0$ de la suite spectrale :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\bigoplus_{x \in X^{(1)}} W^+(M_2(k(x)), \sigma_{k(x)}) & \xrightarrow{d_1^{1,0}} & \displaystyle\bigoplus_{x \in X^{(2)}} W^+(M_2(k(x)), \sigma_{k(x)}) & \xrightarrow{d_1^{2,0}} & 0. \\ \| & & \| & & \\ E_1^{1,0} & & E_1^{2,0} & & \end{array}$$

On a $\mathrm{coker}(d_1^{1,0}) = E_2^{2,0}$. Mais pour $x \in X^{(2)}$,

$$W^+(M_2(k(x)), \sigma_{k(x)}) \simeq W^-(k(x)) = 0$$

par le lemme 5.16, donc on a bien $E_2^{0,2} = 0$.

Montrons maintenant que $E_2^{0,2} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus R^\times/R^{\times 2}$. Observons que $\ker(d_1^{0,2}) = E_2^{0,2}$ où

$$W^-(\mathcal{Q}_K, \sigma_K) \xrightarrow{d_1^{0,2}} \bigoplus_{x \in X^{(1)}} W^-(\mathcal{Q}_{k(x)}, \sigma_{k(x)}).$$

Comme $E_2^{2,0} = 0$, on voit que $E_2^{0,2} \simeq W^-(\mathcal{Q}, \sigma)$ et, comme dans la preuve du théorème 5.18, on a donc une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & W^-(\mathcal{Q}, \sigma) & \xrightarrow{d} & W^-(\mathcal{Q}_K, \sigma_K) & \xrightarrow{d_1^{0,2}} & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} W^-(\mathcal{Q}_{k(x)}, \sigma_{k(x)}), \qquad (*) \\ & & & & \| & & \| \\ & & & & E_1^{0,2} & & E_1^{1,2} \end{array}$$

i.e. on a aussi la pureté pour les groupes de Witt de formes anti-hermitiennes[2] sur R. Pour $x \in X^{(1)}$, $\mathrm{Br}(k(x)) = 0$ donc $\mathcal{Q}_{k(x)}$ est déployée. Par le lemme 5.22, $E_1^{1,2}$ est égal à une somme directe de copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus k(x)^\times/k(x)^{\times 2}$ sur les points de codimension 1.

Donnons une description explicite de la flèche de résidu $d_1^{0,2}$. Elle se décompose en composantes

$$d_1^{0,2} = \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \partial_x,$$

dont la "x-composante" est

$$W^-(\mathcal{Q}_K, \sigma_K) \xrightarrow{\partial_x} W^-(M_2(k(x)), \sigma_{k(x)}).$$

Comme R est un anneau régulier, R_x est un anneau de valuation discrète pour $x \in X^{(1)}$. Par [Gil5, Prop. 6.5] et [Gil1, Sect. 6.3] on peut choisir une uniformisante π_x telle que $\partial_x = \partial_x^{\pi_x}$, une deuxième flèche de résidu définie comme suit :

Tout espace anti-hermitien sur $(\mathcal{Q}_K, \sigma_K)$ est isométrique à un espace diagonal de la forme $< \alpha_1, ..., \alpha_n > + < \pi_x\beta_1, ..., \pi_x\beta_m >$ avec $\alpha, \beta \in \mathcal{Q}_{R_x}^\times$. On définit

$$\partial_x^{\pi_x} : [< \alpha_1, ..., \alpha_n > + < \pi_x\beta_1, ..., \pi_x\beta_m >] \mapsto [< \overline{\beta_1}, ..., \overline{\beta_m} >]$$

[2]Pureté pour les groupes de Witt de formes anti-hermitiennes sur une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ à involution de première espèce τ sur un schéma X est l'exactitude du complexe de Gersten-Witt anti-hermitien, i.e. du complexe

$$0 \longrightarrow W^-(\mathcal{A}_{k(x)}, \tau_{k(x)}) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(0)}} W^-(\mathcal{A}_{k(x)}, \tau_{k(x)}) \xrightarrow{d_1^{0,-2}} \dots \xrightarrow{d_1^{n-1,-2}} \bigoplus_{x \in X^{(n)}} W^-(\mathcal{A}_{k(x)}, \tau_{k(x)}) \longrightarrow 0,$$

dans le terme $\bigoplus_{x \in X^{(0)}} W^-(\mathcal{A}_{k(x)}, \tau_{k(x)})$.

où pour $\beta \in \mathcal{Q}_{R_x}$, $\overline{\beta}$ est la réduction de β modulo (π_x).

Il s'agit maintenant de comprendre le noyau de la flèche $d_1^{0,2}$. Observons que si h est une $(\mathcal{Q}, \sigma)$-forme anti-hermitienne, son invariant de Clifford $c(h)$ est zéro, comme $c(h) \in {}_2\operatorname{Br}(R)/\mathcal{Q} = 0$, cf. [BFP, Sect. 2.1, Clifford Invariant]. La $(\mathcal{Q}_K, \sigma_K)$-forme $h_K = h \otimes_R K$ est déterminée par son dimension et discriminant. L'image de $W^-(\mathcal{Q}, \sigma)$ dans $W^-(\mathcal{Q}_K, \sigma_K)$ est donc engendrée par les classes des espaces de la forme $< \gamma >$, $\gamma \in \mathcal{Q}_K^\times$ de norme réduite non triviale. La suite exacte $(*)$ montre alors que le noyau de $d_1^{0,2}$ est également engendré par les classes d'espaces de cette forme.

Maintenant, l'image de $[< \gamma >]$ par ∂_x est triviale si et seulement si γ n'est pas contenu dans l'idéal engendré par π_x dans $\mathcal{Q}_{R_x}$. Donc, pour que l'image de $[< \gamma >]$ par $d_1^{0,2}$ soit triviale, il faut que γ ne soit contenu dans aucun idéal de la forme $\pi_x \mathcal{Q}$, i.e. $\gamma \in \mathcal{Q}^\times$. Il suit que le noyau de $d_1^{0,2}$ est engendré par $< X >, < Y >$ et $< XY >$, donc $E_2^{0,2} = \ker(d_1^{0,2}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus R^\times/R^{\times 2} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^2$ et la preuve du théorème est terminée. □

Il reste à établir des conditions pour la simplification des $(\mathcal{Q}, \sigma)$-formes anti-hermitiennes.

Théorème 5.24. *Soit $n \geq 8$. Soit (M, h) un espace anti-hermitien sur $(\mathcal{Q}, \sigma)$ de rang relatif pair $n = 2r$. Alors (M, h) se décompose :*

- $(M, h) \simeq \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^r)$ *si* $\operatorname{disc}(M, h) = 1$ *mod* $R^\times/R^{\times 2}$,
- $(M, h) \simeq (\mathcal{Q}^2, < XY, Y >) \perp \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^{r-1})$ *si* $\operatorname{disc}(M, h) = t_1$ *mod* $R^\times/R^{\times 2}$,
- $(M, h) \simeq (\mathcal{Q}^2, < X, XY >) \perp \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^{r-1})$ *si* $\operatorname{disc}(M, h) = t_2$ *mod* $R^\times/R^{\times 2}$ *et*
- $(M, h) \simeq (\mathcal{Q}^2, < X, Y >) \perp \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^{r-1})$ *si* $\operatorname{disc}(M, h) = t_1 t_2$ *mod* $R^\times/R^{\times 2}$.

Si (M, h) est un espace anti-hermitien sur $(\mathcal{Q}, \sigma)$ de rang relatif impair $n = 2r + 1$. Alors (M, h) se décompose :

- $(M, h) \simeq (\mathcal{Q}^3, < X, Y, XY >) \perp \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^{r-1})$ *si* $\operatorname{disc}(M, h) = 1$ *mod* $R^\times/R^{\times 2}$,
- $(M, h) \simeq (\mathcal{Q}, < X >) \perp \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^r)$ *si* $\operatorname{disc}(M, h) = t_1$ *mod* $R^\times/R^{\times 2}$,
- $(M, h) \simeq (\mathcal{Q}, < Y >) \perp \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^r)$ *si* $\operatorname{disc}(M, h) = t_2$ *mod* $R^\times/R^{\times 2}$ *et*
- $(M, h) \simeq (\mathcal{Q}, < XY >) \perp \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^r)$ *si* $\operatorname{disc}(M, h) = t_1 t_2$ *mod* $R^\times/R^{\times 2}$.

Démonstration. Comme les preuves sont toutes analogues, on se limite au cas où (M, h) est de rang relatif pair $n = 2r$ et de discriminant $t_1 t_2$. Supposons que $r \geq 4$. Par le théorème 5.23, la classe de (M, h) dans $W^+(\mathcal{Q}, \sigma)$ est $[< X, Y >]$. Par [Kn, I.3.5.4] tout espace hermitien est un facteur direct d'un espace hyperbolique d'un module libre. De plus, tout $\mathcal{Q}$-module projectif de rang ≥ 3 est libre par le corollaire 4.7, donc il existe $s \geq 0$ tel que

$$(M, h) \perp \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^s) \simeq (\mathcal{Q}^2, < X, Y >) \perp \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^{r-1+s}). \tag{5.13}$$

Rappelons que $d := \dim \operatorname{Spm} R = 2$ par le lemme 2.14. Puisque $r - 1 \geq d + 1 = 3$, on peut appliquer le théorème 2.16 pour déduire que

$$(M,h) \simeq (\mathcal{Q}^2, < X, Y >) \perp \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^{r-1}).$$

Observons que si M est de rang relatif pair $n = 2r$ et de discriminant trivial ou de rang relatif impair $n = 2r+1$ et de discriminant non trivial, il suffit que $r \geq 3$. $\square$

Ce théorème nous dit que les formes anti-hermitiennes sur $(\mathcal{Q}, \sigma)$ sont classifiées par leur dimension et leur discriminant si $n \geq 8$.

Avant de procéder, faisons quelques rappels sur le groupe fondamental (voir e.g. [Mi, I.5]). Soit X un schéma connexe et $\overline{x} \longrightarrow X$ un point géométrique. Pour Y, un revêtement étale fini de X, on note $Aut_X(Y)$ le groupe de X-automorphismes de Y. Observons que l'ensemble $\mathrm{Hom}_X(\overline{x}, Y)$ dispose d'une action naturelle à gauche de $Aut_X(Y)$ et si Y est connexe, cette action est fidèle, i.e. pour tout $g \in \mathrm{Hom}_X(\overline{x}, Y)$, le morphisme

$$Aut_X(Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(\overline{x}, Y)$$

donné par

$$\sigma \mapsto \sigma \circ g$$

est injectif. Si Y est connexe et l'action de $Aut_X(Y)$ est transitive sur $\mathrm{Hom}_X(\overline{x}, Y)$ (donc le morphisme $\sigma \mapsto \sigma \circ g$ est bijectif), alors le revêtement est dit *galoisien*. On définit alors le groupe fondamental de $(X, \overline{x})$ comme la limite projective

$$\pi_1(X, \overline{x}) = \varprojlim Aut_X(X_i),$$

où la limite projective est prise sur tous les revêtements X_i/X qui sont galoisiens. Si l'on ne prend la limite projective que sur les revêtements X_i/X tels que $Aut_X(X_i)$ est abélien on obtient le groupe fondamental abélianisé $\pi_1(X, \overline{x})_{ab}$. Supposons maintenant que X est un T-schéma muni d'une section $e_X : T \longrightarrow X$ (par exemple X est un T-schéma en groupes et e_X est sa section identité). Si l'on ne prend la limite projective que sur les revêtements galoisiens (resp. galoisiens abéliens) $X_i \xrightarrow{f_i} X$ tels que X_i possède également une section $e_{X_i} : T \longrightarrow X_i$ pour laquelle on a $f_i \circ e_{X_i} = e_X$, on obtient le groupe fondamental pointé $\widetilde{\pi}_1(X, \overline{x})$ (resp. le groupe fondamental pointé, abélianisé $\widetilde{\pi}_1(X, \overline{x})_{ab}$).

Observons que si $\overline{x}' \longrightarrow X$ est un autre point géométrique, alors $\pi_1(X, \overline{x}')$ (resp. $\pi_1(X, \overline{x}')_{ab}$, $\widetilde{\pi}_1(X, \overline{x}')$, $\widetilde{\pi}_1(X, \overline{x}')_{ab}$) est isomorphe à $\pi_1(X, \overline{x})$ (resp. $\pi_1(X, \overline{x})_{ab}$, $\widetilde{\pi}_1(X, \overline{x})$, $\widetilde{\pi}_1(X, \overline{x})_{ab}$) et cet isomorphisme est déterminé canoniquement à un isomorphisme intérieur de $\pi_1(X, \overline{x})$ (resp. $\pi_1(X, \overline{x})_{ab}$, $\widetilde{\pi}_1(X, \overline{x})$, $\widetilde{\pi}_1(X, \overline{x})_{ab}$) près. On utilise donc dans ce qui suit les notations $\pi_1(X, *)$, $\pi_1(X, *)_{ab}$, $\widetilde{\pi}_1(X, *)$ et $\widetilde{\pi}_1(X, *)_{ab}$ au lieu de $\pi_1(X, \overline{x})$, $\pi_1(X, \overline{x})_{ab}$, $\widetilde{\pi}_1(X, \overline{x})$ et $\widetilde{\pi}_1(X, \overline{x})_{ab}$.

Introduisons maintenant la suite de Hochschild-Serre pour la cohomologie réduite, que l'on utilise dans le lemme suivant. Soit L un corps, $L_{sép}$ une clôture séparable de L et notons Γ_L le groupe de Galois absolu de L. Soit $\mathbf{G}$ un L-groupe algébrique. Ensuite, supposons que n est premier à la caractéristique de L et notons $\widetilde{H}^q(\mathbf{G}, \boldsymbol{\mu}_n)$ le q-ième groupe de cohomologie étale réduite de $\mathbf{G}$ à coefficients dans $\boldsymbol{\mu}_n$ (voir e.g. [Me, sect. 3.2]). On obtient alors une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(\Gamma_L, \widetilde{H}^q(\mathbf{G}_{L_{s\acute{e}p}}, \boldsymbol{\mu}_n)) \Rightarrow \widetilde{H}^{p+q}(\mathbf{G}, \boldsymbol{\mu}_n), \tag{5.14}$$

voir e.g. *loc. cit.* ou [Mi, Ch. III, Th. 2.20], appelée la suite spectrale de Hochschild-Serre pour la cohomologie réduite.

Lemme 5.25. *Soit h une $(\mathcal{Q}, \sigma)$-forme anti-hermitienne ou une R-forme quadratique de rang pair.*

1. *Tout revêtement fini, étale, abélien et pointé de $\mathbf{SO}(h)$ admet soit une section, soit est isomorphe à $\mathbf{Spin}(h)$, i.e.*

$$\widetilde{\pi}_1(\mathbf{SO}(h), *)_{ab} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

2. *Soit h' un autre telle forme, alors l'homomorphisme naturel*

$$\widetilde{\pi}_1(\mathbf{SO}(h \perp h'), *)_{ab} \longrightarrow \widetilde{\pi}_1(\mathbf{SO}(h), *)_{ab}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Prouvons la première assertion. Soit $\overline{K}$ une clôture séparable (donc également algébrique) de K. Considérons les schémas

$$\mathbf{SO}(h)_K := \mathbf{SO}(h) \times_R K \quad \text{et} \quad \mathbf{SO}(h)_{\overline{K}} := \mathbf{SO}(h) \times_R \overline{K}.$$

On démontre le lemme à l'aide de la suite spectrale de Hochschild-Serre pour la cohomologie réduite (5.14), avec $L = K$ et $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(h)_K$, i.e. on obtient

$$E_2^{p,q} = H^p(\Gamma_K, \widetilde{H}^q(\mathbf{SO}(h)_{\overline{K}}, \boldsymbol{\mu}_n)) \Rightarrow \widetilde{H}^{p+q}(\mathbf{SO}(h)_K, \boldsymbol{\mu}_n),$$

où Γ_K désigne le groupe de Galois absolu de K. Les premiers termes de la suite spectrale fournissent une suite exacte (e.g. [Mi, App. B, Th. 1]) :

$$0 \longrightarrow H^1(\Gamma_K, \widetilde{H}^0(\mathbf{SO}(h)_{\overline{K}}, \boldsymbol{\mu}_n)) \longrightarrow \widetilde{H}^1(\mathbf{SO}(h)_K, \boldsymbol{\mu}_n) \longrightarrow$$
$$H^0(\Gamma_K, \widetilde{H}^1(\mathbf{SO}(h)_{\overline{K}}, \boldsymbol{\mu}_n)) \longrightarrow H^2(\Gamma_K, \widetilde{H}^0(\mathbf{SO}(h)_{\overline{K}}, \boldsymbol{\mu}_n)).$$

Mais comme $\mathbf{SO}(h)_{\overline{K}}$ est connexe, on a $\widetilde{H}^0(\mathbf{SO}(h)_{\overline{K}}, \boldsymbol{\mu}_n) = 1$. Il suit que

$$\widetilde{H}^1(\mathbf{SO}(h)_K, \boldsymbol{\mu}_n) \simeq H^0(K, \widetilde{H}^1(\mathbf{SO}(h)_{\overline{K}}, \boldsymbol{\mu}_n)) = \widetilde{H}^1(\mathbf{SO}(h)_{\overline{K}}, \boldsymbol{\mu}_n)^{\Gamma_K},$$

L'ensemble $\widetilde{H}^1(\mathbf{SO}(h)_K, \boldsymbol{\mu}_n)$ est alors invariant sous le groupe de Galois Γ_K, donc

$$\widetilde{H}^1(\mathbf{SO}(h)_K, \boldsymbol{\mu}_n) \simeq \widetilde{H}^1(\mathbf{SO}(h)_{\overline{K}}, \boldsymbol{\mu}_n).$$

En utilisant la suite exacte de Kummer et [Ro, Th. 3], on obtient (cf. [Me, sect. 3.2, suite (4)]) une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbf{SO}(h)_{\overline{K}}^* / \mathbf{SO}(h)_{\overline{K}}^{*\,n} \longrightarrow \widetilde{H}^1(\mathbf{SO}(h)_{\overline{K}}, \boldsymbol{\mu}_n) \longrightarrow_n \mathrm{Pic}(\mathbf{G}) \longrightarrow 1$$

pour la cohomologie réduite (où pour un corps L et un L-groupe $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}^* = \mathrm{Hom}_{L-gr.}(\mathbf{G}, \mathbb{G}_m)$ est le groupe de caractères de $\mathbf{G}$ sur L). Par [Sa, lemme 6.9 (iii)], on a $\mathrm{Pic}(\mathbf{SO}(h)_{\overline{K}}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Donc, comme $\mathbf{SO}(h)_{\overline{K}}$ est semi-simple on a alors

$$\widetilde{H}^1(\mathbf{SO}(h)_K, \boldsymbol{\mu}_n) \simeq \widetilde{H}^1(\mathbf{SO}(h)_{\overline{K}}, \boldsymbol{\mu}_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair ;} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n \text{ est pair ;} \end{cases}$$

Maintenant, comme R est connexe et lisse sur k on a une injection

$$\widetilde{H}^1(\mathbf{SO}(h), \boldsymbol{\mu}_n) \hookrightarrow \widetilde{H}^1(\mathbf{SO}(h)_K, \boldsymbol{\mu}_n).$$

Donc cette injection est en fait une bijection et la première partie est prouvée.

Montrons la deuxième assertion. Il suffit de démontrer ceci sur $\overline{K}$ dans le cas déployé et pour $h' \simeq < 1 >$ une forme quadratique de rang 1 sur R. Il s'agit de montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Spin}_{n,\overline{K}} & \longrightarrow & \mathbf{Spin}_{n+1,\overline{K}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{SO}_{n,\overline{K}} & \longrightarrow & \mathbf{SO}_{n+1,\overline{K}} \end{array}$$

avec les flèches évidentes est cartésien. Mais ceci est une conséquence de l'isomorphisme

$$\mathbf{Spin}_{n+1,\overline{K}} \,/\, \mathbf{Spin}_{n,\overline{K}} \simeq \mathbf{SO}_{n+1,\overline{K}} \,/\, \mathbf{SO}_{n,\overline{K}},$$

voir [Kne, p.74]. □

Lemme 5.26. *Supposons que (M, h) est un espace anti-hermitien isotrope de rang relatif n sur $(\mathcal{Q}, \sigma)$. Alors la norme spinorielle*

$$\mathrm{N}_h : \mathbf{SO}(h)(R) \longrightarrow H^1(R, \boldsymbol{\mu}_2) \simeq R^\times / R^{\times 2}$$

est surjective.

Démonstration. Soit h une forme anti-hermitienne isotrope sur $(\mathcal{Q}, \sigma)$. Donc h possède une décomposition $h \simeq h' \perp h''$, avec $h' \simeq \mathfrak{H}(\mathcal{Q})$ hyperbolique. Le sous-groupe de $\mathbf{SO}(h)$ des éléments qui fixent l'espace h'' est isomorphe au groupe $\mathbf{SO}(h')$. La propriété du revêtement universel pointé produit une flèche $\varphi : \mathbf{Spin}(h') \longrightarrow \mathbf{Spin}(h)$ d'ensembles pointés et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Spin}(h') & \xrightarrow{p'} & \mathbf{SO}(h') \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Spin}(h) & \xrightarrow{p} & \mathbf{SO}(h). \end{array}$$

Comme $\mathbf{Spin}(h')$ est connexe et $\widetilde{\pi}_1(\mathbf{SO}(h'), *)_{ab} \simeq \widetilde{\pi}_1(\mathbf{SO}(h), *)_{ab} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par le lemme 5.25, ce diagramme est cartésien. Pour vérifier que φ est un homomorphisme de groupe, on considère la flèche suivante

$$m : \mathbf{Spin}(h') \times \mathbf{Spin}(h) \longrightarrow \mathbf{Spin}(h),$$

$$(x,y) \mapsto \varphi(x)^{-1}\varphi(xy)\varphi(y)^{-1}.$$

La composition $p\circ\varphi$ étant un morphisme de R-groupes, il suit que $\mathrm{Im}(m) \subset \boldsymbol{\mu}_2$. Mais $\mathbf{Spin}(h')$ est connexe et donc n'a pas de quotient fini étale. Il suit que m est la flèche triviale et alors φ est bien un homomorphisme de groupes. De plus, comme φ est une immersion fermée, elle induit un isomorphisme sur les centres, on a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \boldsymbol{\mu}_2(R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbf{Spin}(h')(R) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbf{SO}(h')(R) \arrow[r, "\mathrm{N}_{h'}"] \arrow[d] & H^1(R,\boldsymbol{\mu}_2) \arrow[d, equal] \\
1 \arrow[r] & \boldsymbol{\mu}_2(R) \arrow[r] & \mathbf{Spin}(h)(R) \arrow[r] & \mathbf{SO}(h)(R) \arrow[r, "\mathrm{N}_h"] & H^1(R,\boldsymbol{\mu}_2).
\end{tikzcd}$$

Ainsi, si $\mathrm{N}_{h'}$ est surjective alors il en est de même pour N_h. Il suffit alors de montrer le lemme pour la forme hyperbolique $h' = \mathfrak{H}(\mathcal{Q})$. Pour le reste de la preuve raisonnons en termes d'algèbres à involutions. Soit donc (A,τ), $(A \simeq M_2(\mathcal{Q}))$, l'algèbre à involution correspondante à h'.

Notons C l'algèbre de Clifford de (A,τ) et soit σ son involution canonique dans le sens de [KMRT, 8.B][3]. Donc (C_K,σ_K), où $C_K = C \otimes_R K$ et $\sigma_K = \sigma \otimes_R K$, est l'algèbre de Clifford de (A_K,τ_K) avec son involution canonique. Par [KMRT, 8.10 et 8.12], C_K est une $K\times K$-algèbre quaternionique et σ_K est son involution standard symplectique qui est la conjugaison quaternionique. Il suit que (C,σ) est une $R\times R$-algèbre quaternionique et que σ est aussi la conjugaison quaternionique. Sa norme réduite $\mathrm{Nrd}_C : C^\times \longrightarrow R^\times \times R^\times$ est alors donnée par $x \mapsto x\sigma(x)$.

Soit $\mathbf{\Gamma}(A,\tau)$ le R-schéma en groupes de Clifford de (A,τ)[4]. Ses R-points peuvent être caractérisés par $\mathbf{\Gamma}(A,\tau)(R) = \{x \in C^\times \mid x\sigma(x) \in R^\times\}$, cf. [KMRT, 15.10]. La norme spinorielle $\mathrm{N}_{h'}$ est alors l'homorphisme qui fait commuter le diagramme suivant, cf. [KMRT, 13.30] :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathbb{G}_m(R) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot 2"'] & \mathbf{\Gamma}(A,\tau)(R) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Nrd}_C|_{\mathbf{\Gamma}(A,\tau)(R)}"] & \mathbf{SO}(h')(R) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{N}_{h'}"] & 1 \\
1 \arrow[r] & R^{\times 2} \arrow[r] & R^\times \arrow[r] & R^\times/R^{\times 2} \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

La $R\times R$-algèbre quaternionique C est une produit de deux R-algèbres quaternioniques Q_1 et Q_2. On a $\mathrm{Nrd}_C(\mathbf{\Gamma}(A,\tau)(R)) = \mathrm{Nrd}_{Q_1}(Q_1^\times) \cap \mathrm{Nrd}_{Q_2}(Q_2^\times)$, où $\mathrm{Nrd}_{Q_i} : Q_i^\times \longrightarrow R^\times$ désigne la norme réduite de la R-algèbre quaternionique Q_i, pour $i = 1,2$. Par [GP1, Lem. 2.10], les normes réduites Nrd_1 et Nrd_2 sont surjectives, donc $\mathrm{Nrd}_C(\mathbf{\Gamma}(A,\tau)(R)) = R^\times$. Il suit que la norme spinorielle $\mathrm{N}_{h'}$ est également surjective et le lemme en résulte. □

[3]Dans [KMRT, 8.B] se trouve une construction d'une algèbre de Clifford à involution pour une algèbre simple centrale à involution de type orthogonal. On voit sans difficulté que cette construction s'étend au cas d'une algèbre séparable centrale sur un anneau commutatif.

[4]Comme plus haut, ce schéma est défini dans [KMRT, 23.B] pour le cas d'un corps de base, mais il peut être défini plus générellement sur un anneau commutatif comme base. La même remarque vaut pour les références suivantes à [KMRT] : bien que les énoncés soient formulés pour un corps de base, ils s'étendent au cas d'un anneau de base.

Théorème 5.27. *Supposons que $n \geq 8$ et que $\widetilde{\mathbf{G}}$ est un schéma en groupes semi-simples simplement connexe de type D_n sur R. Alors*

$$H^1(R, \widetilde{\mathbf{G}}) = 1.$$

Démonstration. Soit (A, τ) l'algèbre à involution telle que $\widetilde{\mathbf{G}} = \mathbf{Spin}(A, \tau)$. Si A est déployée (donc une algèbre de matrices), $\widetilde{\mathbf{G}} = \mathbf{Spin}(q)$ est le groupe des spineurs d'une forme quadratique et alors le théorème suit du corollaire 4.12. Supposons donc que $A \simeq M_n(\mathcal{Q})$. La suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_2 \longrightarrow \mathbf{Spin}(A, \tau) \longrightarrow \mathbf{SO}(A, \tau) \longrightarrow 1$$

induit une suite exacte longue

$$1 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_2(R) \longrightarrow \mathbf{Spin}(A, \tau)(R) \longrightarrow \mathbf{SO}(A, \tau)(R) \xrightarrow{\mathrm{N}} H^1(R, \boldsymbol{\mu}_2) \longrightarrow$$

$$H^1(R, \mathbf{Spin}(A, \tau)) \longrightarrow H^1(R, \mathbf{SO}(A, \tau)) \xrightarrow{\partial} H^2(R, \boldsymbol{\mu}_2).$$

La flèche N signifie la norme spinorielle, qui est surjective par le lemme 5.26, comme par le théorème 5.24 tout espace hermitien de rang ≥ 8 est isotrope. Pour montrer le théorème il s'agit alors de montrer que la flèche ∂ est injective. Pour cela on rappelle la description de l'ensemble $H^1(R, \mathbf{SO}(A, \tau))$ donnée dans la proposition 2.34 :

$$H^1(R, \mathbf{SO}(A, \tau)) \leftrightarrow \mathbf{SSym}(A, \tau)^\times(R)/ \approx$$

où

$$\mathbf{SSym}(A, \tau)^\times(R) = \{(s, z) \in \mathbf{Sym}(A, \tau)^\times(R) \times R^\times \mid \mathrm{Nrd}_A(s) = z^2\}.$$

et $(s, z) \approx (s', z') \;\Leftrightarrow\; s = a \cdot s' \cdot \tau(a)$ et $z = \mathrm{Nrd}_A(a) \cdot z'$ pour un certain $a \in A^\times$.

Soit (s, z) donc un tel couple. On veut montrer que $(s, z) \approx (1, z)$. On sait que $\tau = int(u) \circ \sigma^t$ pour un $u \in \mathrm{Skew}(A, \sigma^t)^\times$ où σ^t désigne l'extension par transposition de l'involution standard σ de $\mathcal{Q}$ à $M_n(\mathcal{Q})$. Donc $\sigma(u)^t = -u$. De plus

$$u^{-1}\, s = u^{-1}\, \tau(s) = u^{-1}\, u\, \sigma(s)^t\, u^{-1} = \sigma(s)^t\, u^{-1} = -\sigma(u^{-1}\, s)^t.$$

Donc $u^{-1}\, s \in \mathrm{Skew}(A, \sigma^t)$ et s définit alors la forme anti-hermitienne suivante sur $(\mathcal{Q}, \sigma)$:

$$h \;: \mathcal{Q}^n \times \mathcal{Q}^n \longrightarrow \mathcal{Q}, \qquad (x, y) \mapsto \sigma(x)^t \cdot u^{-1} s \cdot y.$$

Comme $\mathrm{Nrd}(s) = z^2$, il suit que $\mathrm{Nrd}(u^{-1}s) = \mathrm{Nrd}(u^{-1}) \mod (R^\times)^2$. Donc, par la classification (les théorèmes 5.23 et 5.24) les formes définies par u^{-1} et $u^{-1}s$ sont isométriques. Il existe alors $a \in A^\times$ tel que $u^{-1}s = au^{-1}\sigma(a)^t$, donc

$$s = u\, a\, u^{-1} \sigma(a)^t = u\, a\, u^{-1} \tau(u\, a\, u^{-1}),$$

ce qui montre que l'on a bien $(s, z) \approx (1, z)$.

Il suit que soit $z = 1$, soit $z = -1$. Il reste donc à considérer les deux éléments $(1,1)$ et $(1,-1)$. Mais si $(1,1) \approx (1,-1)$, il existe alors un $a \in A^\times$ tel que $a\,\tau(a) = 1$ et $\mathrm{Nrd}(a) = -1$. Ainsi, $A \otimes_R K$ admet une isométrie impropre, voir [KMRT, 12.24]. Ceci entraîne que $A \otimes_R K$ est déployée par [Kne, Ch.III, Lem. 1.b], ce qui est une contradiction. On a donc bien $H^1(R, \mathbf{SO}(A,\tau)) = \{(1,1),(1,-1)\}$. Finalement, observons que ∂ est surjective par la remarque 3.9, donc le théorème en résulte. □

Corollaire 5.28. *Supposons que $n \geq 8$ et que $\mathbf{G}$ est un schéma en groupes semi-simples (connexe) de type D_n sur R. Soit $\boldsymbol{\mu}$ le noyau du revêtement universel $\tilde{\mathbf{G}} \twoheadrightarrow \mathbf{G}$. Alors l'homomorphisme connectant*

$$H^1(R,\mathbf{G}) \longrightarrow H^2(R,\boldsymbol{\mu})$$

est bijectif. En particulier, la conjecture A est vraie pour $\mathbf{G}$.

Démonstration. Ceci est une conséquence immédiate du théorème 5.27 et de la remarque 3.9. □

5.6 Le cas $^2A_{n-1}$

Comme d'habitude R désigne un anneau commutatif et k un corps commutatif.

Dans la section 4.1 on a traité le cas d'un schéma en groupes semi-simples sur R de type A_{n-1} intérieur (type $^1A_{n-1}$). Dans cette section on s'occupe du cas d'un schéma en groupes semi-simples de type extérieur, i.e. de type $^2A_{n-1}$.

Supposons que $\mathbf{G}$ est un schéma en groupes semi-simples sur R de type A_{n-1} (intérieur ou extérieur) avec $n \geq 2$. Supposons d'abord que $R = k$ est un corps. Dans ce cas, il est bien connu que l'on peut décrire $\mathbf{G}$ en termes d'algèbres à involutions, voir [We]. En effet, comme il est décrit dans [Kne, Ch. II, 2.4], il existe une extension quadratique k' de k et une algèbre simple centrale A sur k' à une involution de deuxième espèce I (cf. section 2.3) telle que pour toute k-algèbre T

$$\widetilde{\mathbf{G}}(T) = \{x \in A \otimes_k T \ \mid\ xx^I = 1, \mathrm{Nrd}_A(x) = 1\}.$$

De plus, la paire (A, I) est unique à isomorphisme près. On voit sans difficulté que les arguments dans [Kne, Ch. II, 2.4] s'étendent au cas d'un anneau commutatif R (cf. [Kn, III.8.5]). On a ainsi les correspondances bijectives entre les classes :

$\{R$-formes de $\mathbf{G}\}$

$$\longleftrightarrow$$

$\{R$-formes de $\widetilde{\mathbf{G}}\}$

$$\longleftrightarrow$$

$\{S$-algèbres d'Azumaya A de degré $n-1$ à involution I de deuxième espèce où S est une extension étale quadratique de $R\}$.

Dans ces ensembles sont contenues les formes intérieures et extérieures de $\mathbf{G}$. En particulier, si $\mathbf{G} = \mathbf{PGL}_{n-1}$ est déployé, ces ensembles contiennent les groupes de type ${}^1A_{n-1}$ et les groupes de type ${}^2A_{n-1}$. Soit (A, S, I) le triplet d'une algèbre d'Azumaya A à involution de deuxième espèce I sur une extension étale quadratique S de R correspondante à $\mathbf{G}$. Si $S = R \times R$, $\mathbf{G}$ est de type ${}^1A_{n-1}$, sinon $\mathbf{G}$ est de type ${}^2A_{n-1}$ (cf. [KMRT, 29.16]). On peut donc supposer pour la suite que $S \neq R \times R$, i.e. S est un revêtement étale *connexe* de R et donc $\mathbf{G}$ est bien de type ${}^2A_{n-1}$.

Nous nous plaçons maintenant dans la situation suivante. Supposons que k est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, $R = k[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ est notre anneau des polynômes de Laurent à deux variables sur k et $K = k(t_1, t_2)$ son corps de fractions. De plus, notons S une extension étale quadratique de R non déployée, de corps de fractions L. Alors L est une extension quadratique de K.

Pour aborder la démonstration de la conjecture A pour $\mathbf{G}$, notons (A, I) la S-algèbre d'Azumaya à involution unitaire correspondante à $\mathbf{G}$ par les bijections décrites plus haut. En vertu du lemme suivant, A est en fait une algèbre de matrices.

Lemme 5.29. *Soit (A, I) une algèbre d'Azumaya de degré n sur S à involution de deuxième espèce, alors A est déployée, i.e. $A \simeq M_n(S)$.*

Démonstration. On dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}(S) & \xrightarrow{\mathrm{N}_{S/R}} & \mathrm{Br}(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Br}(L) & \xrightarrow{\mathrm{N}_{L/K}} & \mathrm{Br}(K). \end{array}$$

où les deux flèches verticales sont injectives. L'image par la flèche $\mathrm{N}_{L/K}$ de la classe de $A \otimes_S L$ dans $\mathrm{Br}(K)$ est triviale par [KMRT, Prop. 3.15] donc la classe $\mathrm{N}_{S/R}([A])$ est triviale dans $\mathrm{Br}(R)$. Mais la flèche $\mathrm{N}_{S/R}$ est un isomorphisme par [GP1, Prop. 2.1.5], donc la classe de A est déjà triviale dans $\mathrm{Br}(S)$. À priori, on a $A \simeq \mathrm{End}_S(P)$ pour un S-module fidèlement projectif P, mais par le théorème 3.3, P est en fait libre, donc on a $A \simeq M_n(S)$. ◻

On a donc $A \simeq M_n(S)$. Notons $\iota : S \longrightarrow S$ le R-automorphisme non trivial. C'est une involution de deuxième espèce sur S. Suivant le lemme 3.2 on a $\mathrm{Pic}(S) = 0$. On a alors par [KMRT, Th. 4.2] la correspondance bijective :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{involutions } I \text{ de deuxième espèce} \\ \text{sur } \mathrm{End}_S(P) \simeq M_n(S) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{formes hermitiennes régulières } (P, h) \text{ sur} \\ (S, \iota) \text{ à similitude (un facteur de } R^\times) \text{ près} \end{array} \right\}.$$

On va donc calculer d'abord le groupe de Witt des formes hermitiennes sur (S,ι). Pour cela on se sert, comme dans la section précédente, de la suite spectrale (5.3).

Fixons les notations suivantes : écrivons $Y = \operatorname{Spec} R$, $X = \operatorname{Spec} S$ et

$$Z = \{x \in X \mid \iota(x) = x\}$$

pour le sous-ensemble des points fixes de X sous l'involution ι. Observons que cet ensemble n'est pas un sous-schéma de $\operatorname{Spec} S$, vu qu'il ne contient aucun point fermé de $\operatorname{Spec} S$. Soit $x \in Z$ et notons $y \in Y$ son image par le morphisme naturel $X \longrightarrow Y$. Alors l'involution ι induit une involution $\iota_{k(x)}$ sur le corps résiduel $k(x)$ de x avec $\operatorname{Fix}(\iota) = k(y)$, le corps résiduel de y. Cette involution $\iota_{k(x)}$ est donc l'unique automorphisme non trivial de l'extension quadratique de corps $k(x)/k(y)$. Montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 5.30. *1. Les (L,ι_L)-formes hermitiennes sont classifiées par leur dimension et leur déterminant, donc*

$$W^+(L,\iota_L) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus K^\times / \operatorname{N}_{L/K}(L^\times).$$

de générateurs $< 1 >$ et $< 1, -\alpha >$ où $\alpha \in K^\times \setminus \operatorname{N}_{L/K}(L^\times)$.

2. Soit $x \in Z \cap X^{(1)}$, alors les formes hermitiennes de même dimension sont isométriques, donc on a

$$W^+(k(x),\iota_{k(x)}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

de générateur $< 1 >$.

Démonstration. Comme K est un corps C_2, toute K-forme quadratique de dimension 5 est isotrope. De même, comme $k(y)$ est un corps C_1 pour $x \in Y^{(1)}$, toute $k(y)$-forme quadratique de dimension 3 est isotrope. Le lemme est donc une conséquence de [Sch, Ex. 10.1.6 (ii)] et [Sch, Th. 10.1.2] pour la première assertion et de [Sch, Ex. 10.1.6 (i)] et [Sch, Th. 10.1.2] pour la deuxième. $\square$

On peut à présent calculer le groupe de Witt des formes hermitiennes sur S/R.

Théorème 5.31. *On a $W^+(S,\iota) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus R^\times / \operatorname{N}_{S/R}(S^\times) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, de générateurs $< 1 >$ et $< 1, -t_2 >$.*

Démonstration. On utilise la suite spectrale (5.15) de S. Gille pour les schémas à involution de deuxième espèce, avec $\mathcal{I}_\bullet$ une résolution injective de S :

$$E_1^{s,t}(S,\iota,S) = \bigoplus_{x \in Z \cap X^{(s)}} W^t(D^b(\mathcal{M}_{lf}(S_x)),\sigma_x,S_x) \Rightarrow \tilde{W}^{s+t}(S,\iota,S). \tag{5.15}$$

Par la section 5.3.2 on a un isomorphisme $\widetilde{W}^{s+t}(S,\iota,S) \simeq W^+(S,\iota)$. Il s'agit donc de calculer le terme $E^0(S,\iota,S)$. Ce groupe a une filtration dont les quotients successifs sont les $E_\infty^{p,-p}$. On observe que, déjà sur le deuxième niveau, toutes les différentielles dans cette suite spectrale sont nulles. On a donc $E_\infty^{p,-p} = E_2^{p,-p}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Par la remarque 5.14, ces termes sont nuls si $p \neq 0, 2$. On va montrer que $E_2^{2,-2} = 0$ et que $E_2^{0,0} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus R^\times / \mathrm{N}_{S/R}(S^\times)$. Dans ce cas $E_2^{0,0}$ est le seul quotient non nul de la filtration de E^0 et le résultat suit. Observons que la ligne $t = -2$ du premier niveau de la suite spectrale s'écrit de la façon suivante :

$$0 \longrightarrow W^-(L, \iota_L) \xrightarrow{d_1^{0,-2}} \bigoplus_{x \in Z \cap X^{(1)}} W^-(k(x), \iota_{k(x)}) \xrightarrow{d_1^{1,-2}} \bigoplus_{x \in Z \cap X^{(2)}} W^-(k(x), \iota_{k(x)}) \longrightarrow 0.$$

Mais X/Y est un revêtement étale, donc l'ensemble $Z \cap X^{(2)}$ est en fait vide. On a donc $\mathrm{Im}(d_1^{0,-2}) = 0$. Comme on a une surjection $\mathrm{Im}(d_1^{0,-2}) \twoheadrightarrow E_2^{2,-2}$, on a bien $E_2^{2,-2} = 0$. Il suit que $W^+(S, \iota) \simeq E_2^{0,0}$. Donc la ligne $t = 0$ du premier niveau de la suite spectrale fournit la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow W^+(S, \iota) \longrightarrow W^+(L, \iota_L) \xrightarrow{d_1^{0,0}} \bigoplus_{x \in Z \cap X^{(1)}} W^+(k(x), \iota_{k(x)}),$$

i.e. on a la pureté pour les groupes Witt des S/R-formes hermitiennes[5]. Il reste à expliciter la différentielle $d_1^{0,0}$.

Donnons une description explicite de la flèche de résidu $d_1^{0,0}$. Elle se décompose en composantes

$$d_1^{0,0} = \bigoplus_{x \in Z \cap X^{(1)}} \partial_x,$$

dont la "x-composante" est

$$W^+(L, \iota_L) \xrightarrow{\partial_x} W^+(k(x), \iota_{k(x)}).$$

Comme S est un anneau régulier, S_x est un anneau de valuation discrète pour $x \in X^{(1)}$. Par [Gil5, Prop. 6.5] et [Gil1, Sect. 6.3] on peut choisir une uniformisante π_x telle que $\partial_x = \partial_x^{\pi_x}$, une deuxième flèche de résidu définie comme suit :

Tout espace hermitien sur (L, ι_L) est isométrique à un espace diagonal de la forme $< \alpha_1, ..., \alpha_n > + < \pi_x\beta_1, ..., \pi_x\beta_m >$ avec $\alpha, \beta \in S_x^\times$. On définit

$$\partial_x^{\pi_x} : [< \alpha_1, ..., \alpha_n > + < \pi_x\beta_1, ..., \pi_x\beta_m >] \mapsto [< \overline{\beta_1}, ..., \overline{\beta_m} >]$$

où pour $\beta \in S_x$, $\overline{\beta}$ est la réduction de β modulo (π_x).

Comme $W^+(L, \iota_L) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus K^\times / \mathrm{N}_{L/K}(L^\times)$ par le lemme 5.30, ce groupe est engendré par les classes de $< 1 >$ et des espaces de la forme $< 1, -\gamma >$, $\gamma \in L^\times$ de norme non triviale.

[5]Pureté pour les groupes de Witt de formes hermitiennes sur un schéma X à involution de deuxième espèce ι est l'exactitude du complexe de Gersten-Witt hermitien, i.e. du complexe

$$0 \longrightarrow W^+(k(x), \iota_{k(x)}) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(0)} \cap Z} W^+(k(x), \iota_{k(x)}) \xrightarrow{d_1^{0,2}} ... \xrightarrow{d_1^{n-1,2}} \bigoplus_{x \in X^{(n)} \cap Z} W^-(k(x), \iota_{k(x)}) \longrightarrow 0,$$

dans le terme $\bigoplus_{x \in X^{(0)} \cap Z} W^+(k(x), \iota_{k(x)})$.

L'image de $[<1,-\gamma>]$ par ∂_x est triviale si et seulement si γ n'est pas contenu dans l'idéal engendré par π_x dans S_x. Donc, pour que l'image de $[<1,-\gamma>]$ par $d_1^{0,2}$ soit triviale, il faut que γ ne soit contenu dans aucun idéal de la forme $\pi_x S$, i.e. $\gamma \in S^\times$. Il suit que le noyau est engendré par $<1>$ et $<1,-t_2>$, donc $E_2^{0,0} = \ker(d_1^{0,0}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus R^\times / \mathrm{N}_{S/R}(S^\times) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et la preuve du théorème est terminée. □

Il reste à établir des conditions pour la simplification de (S,ι)-formes anti-hermitiennes.

Théorème 5.32. *Soit $n \geq 7$. Soit (M,h) un espace hermitien sur (S,ι) de rang relatif pair $n = 2r$. Alors (M,h) se décompose :*

- $(M,h) \simeq \mathfrak{H}(S^r)$ *si* $\mathrm{disc}(M,h) = 1$ *mod* $R^\times / \mathrm{N}_{S/R}(S^\times)$,
- $(M,h) \simeq (S^2, <1,-t_2>) \perp \mathfrak{H}(S^{r-1})$ *si* $\mathrm{disc}(M,h) = t_2$ *mod* $R^\times / \mathrm{N}_{S/R}(S^\times)$.

Si (M,h) est un espace anti-hermitien sur (S,ι) de rang relatif impair $n = 2r+1$. Alors (M,h) se décompose :

- $(M,h) \simeq (S, <1>) \perp \mathfrak{H}(S^r)$ *si* $\mathrm{disc}(M,h) = 1$ *mod* $R^\times / \mathrm{N}_{S/R}(S^\times)$,
- $(M,h) \simeq (S, <t_2>) \perp \mathfrak{H}(S^r)$ *si* $\mathrm{disc}(M,h) = t_2$ *mod* $R^\times / \mathrm{N}_{S/R}(S^\times)$.

Démonstration. Comme les preuves sont toutes analogues, on se limite à prouver le cas où (M,h) est de rang relatif $n = 2r$ et de discriminant t_2. Par le théorème 5.31, la classe de (M,h) dans $W^+(\mathcal{Q},\sigma)$ est $[<1,-t_2>]$. Par [Kn, I.3.5.4] tout espace hermitien est un facteur direct d'un espace hyperbolique d'un module libre. De plus, tout S-module projectif est libre (cf. 3.3), donc il existe $s \geq 0$ tel que

$$(M,h) \perp \mathfrak{H}(S^s) \simeq (S^2, <1,-t_2>) \perp \mathfrak{H}(S^{r-1+s}). \tag{5.16}$$

Rappelons que $d := \dim \mathrm{Spm}\, R = 2$ par le lemme 2.14. Puisque $r-1 \geq d+1 = 3$, on peut appliquer le théorème 2.16 pour déduire que

$$(M,h) \simeq (S^2, <1,-t_2>) \perp \mathfrak{H}(S^{r-1}).$$

Observons que si M est de rang relatif impair $n = 2r+1$ ou de rang relatif pair $n = 2r$ et de discriminant trivial, il suffit que $r \geq 3$. □

Ce théorème nous dit que les formes anti-hermitiennes sur (S,ι) sont classifiées par leur dimension et leur discriminant si $n \geq 7$.

On peut maintenant démontrer la conjecture A pour le schéma en groupes $\mathbf{G}$ de type $^2A_{n-1}$:

Théorème 5.33. *Soient $n \geq 7$ et $\mathbf{G}$ un schéma en groupes semi-simples simplement connexe de type $^2A_{n-1}$ sur R. Alors :*

$$H^1(R,\mathbf{G}) = 1.$$

Démonstration. Soit h une forme hermitienne de rang $n \geq 7$. Considérons la suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow \mathbf{SU}(h) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbf{U}(h) \xrightarrow{\mathrm{Nrd}} R^1_{S/R}(\mathbb{G}_m) \longrightarrow 1.$$

Pour les définitions de $\mathbf{SU}(h)$ et $\mathbf{U}(h)$ voir section 2.4. Il s'agit de montrer que $H^1(R, \mathbf{SU}(h)) = 1$. Soit $a \in M_n(S)$ la matrice hermitienne correspondante à h. Donc

$$\mathbf{U}(h)(R) = \{\, x \in \mathbf{GL}_n(S) \mid a\,\overline{x}^t\, a^{-1} = x^{-1} \,\},$$

voir la définition 2.28, où $\overline{x}$ désigne le conjugué de la matrice x, i.e. si

$$x = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{alors} \quad \overline{x} = (\iota(x_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Par le théorème 5.32, h est en particulier diagonalisable, donc on peut supposer que a est diagonale. Soit maintenant $z \in R^1_{S/R}(\mathbb{G}_m)(R)$. Donc $z \in S^\times$ avec $\mathrm{N}_{S/R}(z) = z\,\iota(z) = 1$. La matrice $s := \mathrm{diag}(1, ..., 1, z)$ est alors telle que $\mathrm{Nrd}(s) = z$ et $s \in \mathbf{U}(h)(R)$, comme

$$a\,\overline{s}^t\, a^{-1} = a\, s^{-1}\, a^{-1} = a\, a^{-1}\, s^{-1} = s^{-1}.$$

Il suit que dans la suite exacte longue

$$1 \longrightarrow \mathbf{SU}(h)(R) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbf{U}(h)(R) \xrightarrow{\mathrm{Nrd}} R^1_{S/R}(\mathbb{G}_m)(R) \longrightarrow$$

$$H^1(R, \mathbf{SU}(h)) \xrightarrow{i_*} H^1(R, \mathbf{U}(h)) \xrightarrow{\mathrm{Nrd}_*} H^1(R, R^1_{S/R}(\mathbb{G}_m))$$

la flèche Nrd est surjective. Comme ceci est vrai pour toute forme de rang $n \geq 7$, la flèche i_* est injective. Il est bien connu que $H^1(R, \mathbf{U}(h))$ classifie les classes d'isométrie des (S, ι)-formes hermitiennes de même rang que h. Par le théorème 5.32, la flèche Nrd_*, qui envoie une forme hermitienne sur son discriminant, a un noyau trivial (deux formes de même rang et même discriminant sont isométriques). Il suit que $H^1(R, \mathbf{SU}(h)) = 1$. □

Corollaire 5.34. *Supposons que $n \geq 7$ et que $\mathbf{G}$ est un schéma en groupes semi-simples (connexe) de type ${}^2A_{n-1}$ sur R. Soit $\boldsymbol{\mu}$ le noyau du revêtement universel $\tilde{\mathbf{G}} \twoheadrightarrow \mathbf{G}$. Alors l'homomorphisme connectant*

$$H^1(R, \mathbf{G}) \longrightarrow H^2(R, \boldsymbol{\mu})$$

est bijectif. En particulier, la conjecture A est vraie pour $\mathbf{G}$.

Démonstration. Ceci est une conséquence immédiate du théorème 5.33 et de la remarque 3.9. □

Chapitre 6

La conjecture B

Nos résultats nous permettent de répondre positivement à la conjecture B dans les cas étudiés précédemment, voir corollaire 6.5. Soient dans ce chapitre k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, $R = k[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ notre anneau des polynômes de Laurent à deux variables sur k et $K = k(t_1, t_2)$ le corps de fractions de R. Ensuite notons $R_m = k[t_1^{\pm\frac{1}{m}}, t_2^{\pm\frac{1}{m}}]$ et $S = k[t_1^{\pm\frac{1}{2}}, t_2^{\pm 1}]$. Finalement, rappelons que $\mathcal{Q}$ désigne la R-algèbre quaternionique de présentation

$$X^2 = t_1, \;\; Y^2 = t_2 \;\text{ et }\; XY = -YX,$$

et notons σ l'involution standard sur $\mathcal{Q}$ qui est la conjugaison quaternionique habituelle.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple, de dimension finie sur k. Soit $\mathbf{G} := \mathbf{Aut}_k(\mathfrak{g})$ le k-groupe algébrique de k-automorphismes de $\mathfrak{g}$. Rappelons que l'ensemble de cohomologie $H^1(R, \mathbf{G})$ classifie, à R-isomorphisme près, les R-formes de $\mathfrak{g}$, i.e. des R-algèbres $\mathcal{L}$, telles que

$$\mathcal{L} \otimes_R R_m \simeq \mathfrak{g} \otimes_k R_m$$

pour un certain $m \geq 1$, cf. section 3.2.1. Supposons que $\mathfrak{g}$ est de type A_{n-1}, $n \geq 3$. Dans ce cas on obtient une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}^0 \xrightarrow{\;i\;} \mathbf{G} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1, \tag{6.1}$$

cf. [SGA3, XXV, th. 1.3], qui induit une suite exacte d'ensembles pointés

$$H^1(R, \mathbf{G}^0) \xrightarrow{\;i_*\;} H^1(R, \mathbf{G}) \longrightarrow H^1(R, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}). \tag{6.2}$$

On définit alors

$$\mathcal{E}(R, \mathbf{G}) := H^1(R, \mathbf{G}) \;\setminus\; \mathrm{Im}\big[H^1(R, \mathbf{G}^0) \xrightarrow{\;i_*\;} H^1(R, \mathbf{G})\big].$$

Cet ensemble classifie les formes extérieures de $\mathfrak{g}$.

Parmi les R-formes de $\mathfrak{g}$ on a les algèbres de multi-lacets de la forme $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathbf{x})$ où $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ avec $x_1, x_2 \in \mathbf{G}$ et $x_1 x_2 = x_2 x_1$, cf. section 3.2.1. L'ensemble

$H^1(R, \mathbf{G})$ ($\mathcal{E}(\mathbf{G})$ resp.) permet alors de classifier ces algèbres de multi-lacets (qui sont des formes extérieures resp.) à R-isomorphie près. On est pourtant intéressé par leur classes de k-isomorphie. Le lemme suivant est donc très utile :

Lemme 6.1. *Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre centrale, de dimension finie et parfaite. Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ sont deux paires d'automorphismes d'ordre fini de $\mathfrak{g}$ qui commutent (i.e. on a $x_1x_2 = x_2x_1$ et $y_1y_2 = y_2y_1$), alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathbf{x}) \simeq_k \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathbf{y})$
2. $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, {}^{\mathbf{a}}\mathbf{x}) \simeq_R \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathbf{y})$ *pour un certain $\mathbf{a} \in GL_2(\mathbb{Z})$, voir section 3.1.*

Démonstration. C'est [GP1, Lem. 5.3]. □

Rappelons que l'action $GL_2(\mathbb{Z})$ mentionnée dans ce lemme passe à l'ensemble $H^1(R, \mathbf{G})$, cf. section 3.1. Le lemme 6.1 donne alors :

Lemme 6.2. *Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de dimension finie et parfaite. Soient $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ deux paires d'automorphismes d'ordre fini de $\mathfrak{g}$ qui commutent (voir plus haut). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathbf{x}) \simeq_k \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathbf{y})$
2. *les cocycles $\alpha(\mathbf{x})$ et $\alpha(\mathbf{y})$ (cf. section 3.1) définissent la même classe dans $H^1(R, \mathbf{G})/GL_2(\mathbb{Z})$, l'ensemble des classes d'isomorphie de $\mathbf{G}$-torseurs sur R, quotienté par l'action de $GL_2(\mathbb{Z})$ sur les cocycles (voir section 3.1).*

L'ensemble de cohomologie $H^1(R, \mathbf{G})$ classifie également certaines algèbres à involutions à isomorphisme près et donc certaines formes quadratiques et hermitiennes à similitude près. La classification des formes quadratiques sur R et formes hermitiennes sur les algèbres à involutions $(\mathcal{Q}, \sigma)$ et (S, ι) permet alors de démontrer le théorème ci-dessous.

Remarque 6.3. *Soit A une structure algébrique sur R. On dit que "A est de K-indice de Tits I" si $A \otimes_R K$ est d'indice de Tits I sur K.*

Théorème 6.4. *Avec les notations précédentes, on a la classification suivante :*

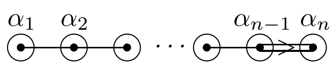
Supposons que $\mathfrak{g}$ est de type B_n avec $n \geq 2$.

On a

$$\sharp\big(H^1(R, \mathbf{G})/GL_2(\mathbb{Z})\big) = 2$$

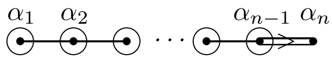
et les deux classes sont représentées par les R-formes quadratiques suivantes :

1. $q \simeq <1> \perp \mathfrak{H}(R^n)$ *de K-indice de Tits déployé*


, (6.3)

de type relatif B_n et

2. $q \simeq < -t_1, -t_2, t_1t_2 > \;\perp\; \mathfrak{H}(R^{n-1})$ de K-indice de Tits



et (6.4)

de type relatif B_{n-1}.

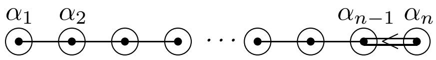
Supposons que $\mathfrak{g}$ est de type C_n avec $n \geq 6$.

On a

$$\sharp\big(\, H^1(R, \mathbf{G})/GL_2(\mathbb{Z})\,\big) = 2.$$

Si n est pair, les deux classes de $H^1(R, \mathbf{G})/GL_2(\mathbb{Z})$ sont représentées par la R-forme symplectique et la $(\mathcal{Q}, \sigma)$-forme hermitienne suivantes :

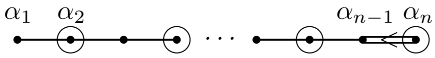
1. $h = \mathfrak{H}(R^n)$ de K-indice de Tits déployé



, (6.5)

de type relatif C_n et

2. $h = \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^{n/2})$ de K-indice de Tits



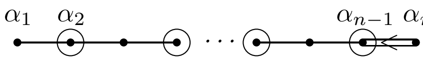
et (6.6)

de type relatif $C_{\frac{n}{2}}$.

Si n est impair, les deux classes de $H^1(R, \mathbf{G})/GL_2(\mathbb{Z})$ peuvent être représentées par la R-forme symplectique et la $(\mathcal{Q}, \sigma)$-forme hermitienne suivantes :

1. $h = \mathfrak{H}(R^n)$ de K-indice de Tits maximal (6.5), de type relatif comme plus haut et

2. $h = < 1 > \;\perp\; \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^{(n-1)/2})$ de K-indice de Tits



et (6.7)

de type relatif $BC_{\frac{n-1}{2}}$.

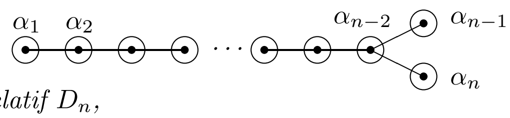
Supposons que $\mathfrak{g}$ est de type D_n avec $n \geq 8$ et n pair.

On a

$$\sharp\big(\, H^1(R, \mathbf{G})/GL_2(\mathbb{Z})\,\big) = 5.$$

Les cinq classes de $H^1(R, \mathbf{G})/GL_2(\mathbb{Z})$ sont représentées par les R-formes quadratiques et les $(\mathcal{Q}, \sigma)$-formes anti-hermitiennes suivantes :

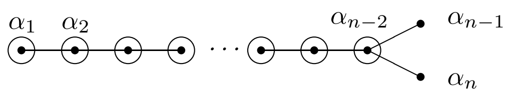
1. $q \simeq \mathfrak{H}(R^n)$ de K-indice de Tits déployé



, (6.8)

de type relatif D_n,

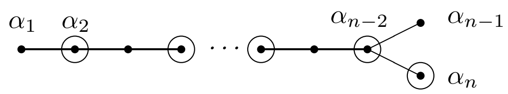
2. *$q \simeq < 1, -t_1, -t_2, t_1t_2 > \ \perp\ \mathfrak{H}(R^{n-2})$ de K-indice de Tits*



, (6.9)

de type relatif B_{n-2},

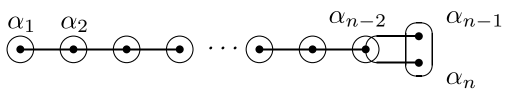
3. *$h \simeq \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^{n/2})$ de K-indice de Tits quasi-déployé*



, (6.10)

de type relatif $C_{\frac{n}{2}}$,

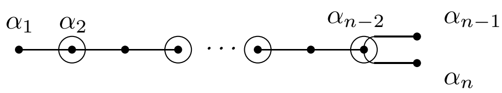
4. *$q \simeq < 1, -t_1 > \ \perp\ \mathfrak{H}(R^{n-1})$ de K-indice de Tits quasi-déployé*



, (6.11)

de type relatif B_{n-1} et

5. *$h \simeq < Y, XY > \ \perp\ \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^{(n-2)/2})$ de K-indice de Tits*



et (6.12)

de type relatif $BC_{\frac{n-2}{2}}$.

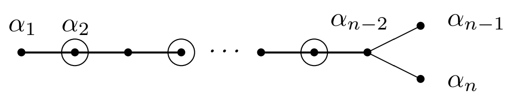
Supposons que $\mathfrak{g}$ est de type D_n avec $n \geq 8$ et n impair.

On a

$$\sharp\big(H^1(R, \mathbf{G})/GL_2(\mathbb{Z})\big) = 5.$$

Les cinq classes de $H^1(R, \mathbf{G})/GL_2(\mathbb{Z})$ sont représentées par les R-formes quadratiques et les $(\mathcal{Q}, \sigma)$-formes anti-hermitiennes suivantes :

1. *$q \simeq \mathfrak{H}(R^n)$ de K-indice de Tits déployé (6.8), de type relatif comme plus haut,*
2. *$q \simeq < 1, -t_1, -t_2, t_1t_2 > \ \perp\ \mathfrak{H}(R^{n-2})$ de K-indice de Tits (6.9), de type relatif comme plus haut,*
3. *$h \simeq < X, Y, XY > \ \perp\ \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^{(n-3)/2})$ de K-indice de Tits*

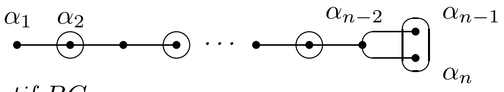


, (6.13)

de type relatif $BC_{\frac{n-3}{2}}$,

4. *$q \simeq < 1, -t_1 > \ \perp\ \mathfrak{H}(R^{n-1})$ de K-indice de Tits (6.11), de type relatif comme plus haut et*

5. $h \simeq < X > \ \perp \ \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^{(n-1)/2})$ *de K-indice de Tits quasi-déployé*



et (6.14)

de type relatif $BC_{\frac{n-1}{2}}$.

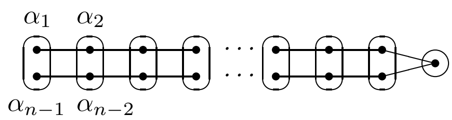
Supposons que $\mathfrak{g}$ est de type A_{n-1} avec $n \geq 7$.

On a

$$\sharp\big(\,\mathcal{E}(R, \mathbf{G})/GL_2(\mathbb{Z})\,\big) = 2$$

si n est pair et les deux classes sont représentées par les (S, ι)-formes hermitiennes suivantes :

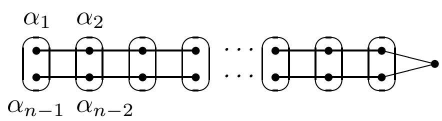
1. $h \simeq \mathfrak{H}(S^{n/2})$ *de K-indice de Tits quasi-déployé*



, (6.15)

de type relatif $C_{\frac{n}{2}}$ et

2. $h \simeq < 1, -t_2 > \ \perp \ \mathfrak{H}(S^{(n-2)/2})$ *de K-indice de Tits*



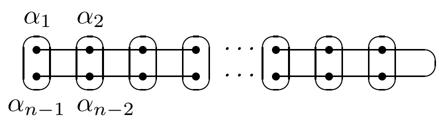
et (6.16)

de type relatif $BC_{\frac{n-2}{2}}$.

Si n est impair,

$$\sharp\big(\,\mathcal{E}(R, \mathbf{G})/GL_2(\mathbb{Z})\,\big) = 1$$

et la classe est représentée par la (S, ι)-forme hermitienne $h \simeq < 1 > \ \perp \ \mathfrak{H}(S^{(n-1)/2})$ de K-indice de Tits quasi-déployé



et (6.17)

de type relatif $BC_{\frac{n-1}{2}}$,

Démonstration. Donnons une description de l'ensemble $H^1(R, \mathbf{G})/GL_2(\mathbb{Z})$. Rappelons que l'ensemble de cohomologie $H^1(R, \mathbf{G})$ classifie certaines algèbres à involutions à isomorphisme près et donc certaines formes quadratiques et hermitiennes à similitude près. On va donc raisonner dans cette preuve en termes de telles formes, i.e. démontrer que ces formes hermitiennes et quadratiques sont classifiées par leur indice de Witt-Tits à similitude et à l'action de $GL_2(\mathbb{Z})$ près.

1) Le type B_n. Supposons que $\mathfrak{g}$ est de type B_n, $n \geq 2$. On sait bien que l'ensemble $H^1(R, \mathbf{G})$ classifie les R-formes quadratiques de rang $2n+1$ à similitude (à un facteur de $R^\times$) près[1]. Le corollaire 4.13 montre que

$$H^1(R, \mathbf{G}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

et que les classes peuvent être représentées par les formes quadratiques $q_1 \simeq <1> \perp \mathfrak{H}(R^n)$ et $q_2 \simeq <-t_1, -t_2, t_1t_2> \perp \mathfrak{H}(R^{n-1})$. Suivant [Ti, Table II] et [Bo, Ch.V.23.4] on alors que $q_1 \otimes_R K$ est d'indice de Tits (6.3) et de type relatif B_n et que $q_2 \otimes_R K$ est d'indice de Tits (6.4) et de type relatif B_{n-1}. Comme l'action de $GL_2(\mathbb{Z})$ sur l'ensemble $H^1(R, \mathbf{G})$ est triviale, cf. [GP1, Th. 5.10] (et les classes données sont distinguées par leur indice de Tits), le théorème résulte dans ce cas.

2) Le type C_n. Supposons que $\mathfrak{g}$ est de type C_n, $n \geq 6$. Le corollaire 5.20 montre que

$$H^1(R, \mathbf{G}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

et que les classes peuvent être représentées par la forme symplectique $h_1 = \mathfrak{H}(R^n)$ (pour tout n), et par les formes hermitiennes $h_2 = \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^{n/2})$ (si n est pair) et $h_3 \simeq <1> \perp \mathfrak{H}(\mathcal{Q}^{(n-1)/2})$ (si n est impair). Suivant [Ti, Table II] et [Bo, Ch.V.23.4] on alors que les K-formes $h_1 \otimes_R K$, $h_2 \otimes_R K$ et $h_3 \otimes_R K$ sont d'indices de Tits (6.5), (6.6) et (6.7) respectivement et de types relatifs C_n, $C_{\frac{n}{2}}$ et $BC_{\frac{n-1}{2}}$ respectivement. Comme l'action de $GL_2(\mathbb{Z})$ sur l'ensemble $H^1(R, \mathbf{G})$ est triviale, cf. [GP1, Th. 5.10] (et les classes données sont distinguées par leur indice de Tits), le théorème résulte dans ce cas.

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}$ est de type A_{n-1} ($n \geq 7$) ou D_n ($n \geq 8$). Soit $\mathbf{G}^0$ la composante connexe de l'élément neutre de $\mathbf{G} = \mathbf{Aut}_k(\mathfrak{g})$. On obtient comme plus haut une suite exacte scindée

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}^0 \xrightarrow{i} \mathbf{G} \overset{s}{\curvearrowleft}\!\!\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1, \tag{6.18}$$

cf. [SGA3, XXV, th. 1.3], qui induit la suite exacte d'ensembles pointés

$$H^1(R, \mathbf{G}^0) \xrightarrow{i_*} H^1(R, \mathbf{G}) \overset{s}{\curvearrowleft}\!\!\longrightarrow H^1(R, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \tag{6.19}$$

également scindée. Supposons que $[a] \in H^1(R, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est une classe représentée par un cocycle a. On peut tordre la suite (6.1) par le cocycle a pour obtenir la suite exacte

$$1 \longrightarrow_{s(a)} \mathbf{G}^0 \longrightarrow_{s(a)} \mathbf{G} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

Observons que ${}_a(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, comme le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est commutatif. Par des arguments standards de cohomologie galoisienne [Gir, III.3.3], on obtient une décomposition

$$H^1(R, \mathbf{G}) \simeq \coprod_{[a] \in H^1(R, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} H^1(R, {}_{s(a)}\mathbf{G}^0) \,/\, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \tag{6.20}$$

[1]Il revient au même de dire que cet ensemble classifie les R-formes quadratiques de rang $2n+1$ et de même discriminant que q.

où l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $H^1(R, {}_{s(a)}\mathbf{G}^0)$ est déduite de l'action tordue de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur ${}_{s(a)}\mathbf{G}^0$. L'équation (6.20) est utile pour comprendre l'action de $GL_2(\mathbb{Z})$. Rappelons que $H^1(R, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq R^\times / R^{\times\, 2}$ et que cet ensemble est constitué des classes $1, t_1, t_2$ et $t_1 t_2$. L'action du groupe $GL_2(\mathbb{Z})$ sur $H^1(R, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ a deux orbites : l'orbite $\{1\}$ et l'orbite $\{t_1, t_2, t_1 t_2\}$. Il suit que l'on peut fixer un discriminant non trivial, disons t_1, pour les groupes de type D et A, et se limiter à considérer des formes avec ce discriminant.

3) Le type D_n. Supposons que $\mathfrak{g}$ est de type D_n, $n \geq 8$. On sait que l'ensemble $H^1(R, \mathbf{G})$ classifie, à R-isomorphisme près, des R-algèbres d'Azumaya de degré $2n$ à involutions de première espèce de type orthogonale. Par le lemme 5.21, chaque classe peut être représentée par une classe de similitudes de R-formes quadratiques ou $(\mathcal{Q}, \sigma)$-formes anti-hermitiennes par des résultats de la section 5.5. L'équation (6.20) et les arguments suivants montrent que, pour représenter chaque classe dans $H^1(R, \mathbf{G})/GL_2(\mathbb{Z})$, on peut se limiter aux formes de discriminant 1 ou t_1. Le théorème 5.24 montre alors que seulement les cas listés dans l'énoncé plus haut peuvent apparaitre. Leurs indices de Tits sont données par [Ti, Table II] et leurs types relatifs par [Bo, Ch.V.23.9]. Le théorème résulte alors dans ce cas également.

3) Le type A_{n-1}. Supposons que $\mathfrak{g}$ est de type A_{n-1}, $n \geq 7$. On sait que l'ensemble $H^1(R, \mathbf{G})$ classifie, à R-isomorphisme près, des algèbres d'Azumaya de degré n sur une extension quadratique, étale de R à une involution de deuxième espèce. L'équation (6.20) et les arguments suivants montrent que, pour représenter chaque classe dans $H^1(R, \mathbf{G})/GL_2(\mathbb{Z})$, on peut se limiter aux algèbres à involutions de discriminant 1 ou t_1 (i.e. de centre $R \times R$ ou S). Or on veut décrire les éléments de $\mathcal{E}(R, \mathbf{G})/GL_2(\mathbb{Z})$, où on rappelle que

$$\mathcal{E}(R, \mathbf{G}) := H^1(R, \mathbf{G}) \ \setminus \ \mathrm{Im}\left[H^1(R, \mathbf{G}^0) \xrightarrow{i_*} H^1(R, \mathbf{G})\right].$$

On peut donc se limiter aux algèbres à involutions (de la forme décrite plus haut) de discriminant t_1. Ceux-ci correspondent par le lemme 5.29 à des (S, ι)-formes hermitiennes de rang n. Le théorème 5.32 montre alors que seulement les cas listés dans l'énoncé plus haut apparaissent. Leurs indices de Tits sont donnés par [Ti, Table II] et leurs types relatifs par [Bo, Ch.V.23.9]. Le théorème résulte alors dans ce cas aussi et la preuve est terminée. $\square$

Corollaire 6.5. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple, de dimension finie sur k de type A_{n-1} ($n \geq 7$), B_n ($n \geq 2$), C_n ($n \geq 6$) ou D_n ($n \geq 8$). Notons $\mathbf{G} = \mathbf{Aut}_k(\mathfrak{g})$ son groupe algébrique de k-automorphismes. Soient $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ deux paires d'automorphismes d'ordre fini de $\mathfrak{g}$ qui commutent, i.e. on a $x_1 x_2 = x_2 x_1$ et $y_1 y_2 = y_2 y_1$. Si $\mathfrak{g}$ est de type A_{n-1}, supposons de plus que les éléments x_1, x_2, y_1 et y_2 ne sont pas tous contenus dans la composante connexe de l'élément neutre de $\mathbf{Aut}_k(\mathfrak{g})$. Alors $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathbf{x}) \otimes_{R_2} K$ est une algèbre de Lie de dimension finie et isotrope sur K. De plus,*

$$\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathbf{x}) \simeq_{k-Lie} \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow I(\mathbf{x}) = I(\mathbf{y})$$

où $I(\mathbf{x})$ et $I(\mathbf{y})$ sont les indices de Witt-Tits de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ respectivement (voir section 3.1.1).

Démonstration. Suivant le lemme 6.2, il s'agit de montrer que deux paires $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ ont le même indice de Tits si et seulement si leurs cocycles (voir 3.1) sont dans la même classe dans l'ensemble $H^1(R, \mathbf{G})$, à l'action de $GL_2(\mathbb{Z})$ près. Mais le théorème 6.4 montre que toutes les classes dans l'ensemble $H^1(R, \mathbf{G})/GL_2(\mathbb{Z})$ peuvent être distinguées par leurs indices de Tits. Le corollaire suit. □

Remarque 6.6. 1. *Ce corollaire montre en fait qu'en rang assez grand une algèbre de multi-lacets est determinée par son indice de Tits en dehors du type A et sous certaines conditions si elle est de type A (si elle est de type ${}^2A$, essentiellement). Gille et Pianzola ont conjecturé ceci par contre seulement en dehors de type A [GP1, Conj. 6.4].*

2. *Soit $k((t_1))((t_2))$ le corps des séries formelles en deux variables sur k. Observons que la flèche naturelle*

$$H^1(R, \mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} H^1(k((t_1))((t_2)), \mathbf{G}),$$

est alors une bijection dans le cas où $\mathbf{G}$ est de type B_n $(n \geq 2)$, C_n $(n \geq 6)$, D_n $(n \geq 8)$ ou ${}^2A_{n-1}$ $(n \geq 7)$, et que le corps $k((t_1))((t_2))$ se comporte comme un corps p-adique. Ceci découle de [Ti, Table II] (les descriptions des corps "spéciaux").

3. *En tenant compte de [GP3], on voit que toutes les formes quadratiques et hermitiennes qui apparaissent dans le théorème 6.4 correspondent à des algèbres de multi-lacets. Une façon plus fastidieuse de montrer cela, serait d'utiliser le "recognition theorem", voir [GP1, Th. 5.13].*

Annexe A

Compatibilité de la théorie de Morita avec la suite spectrale de S.Gille

Dans cet appendice on prouve le théorème A.8 qui établit une certaine commutativité entre les flèches de résidu de la suite spectrale de S.Gille et les “flèches de Morita” qui apparaissent entre les groupes de Witt des algèbres simples centrales sur les corps résiduels. Rappelons d'abord encore une fois les conventions de signe dans les catégories dérivées, introduites au début de la section 5.1.

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie exacte. On note $D^b(\mathcal{E})$ sa catégorie dérivée bornée et T le foncteur de translation de cette catégorie. Selon l'usage habituel dans la théorie de Witt dérivée et cohérente, on utilise des complexes homologiques, donc $T(M_\bullet)_i = M_\bullet[1]_i = M_{i-1}$ pour tout $M_\bullet \in D^b(\mathcal{E})$. Si $\mathcal{E}$ possède un foncteur Hom intérieur ou un produit tensoriel $\otimes$, on utilise les conventions suivantes pour $\mathrm{Hom}(M_\bullet, N_\bullet)$ et $M_\bullet \otimes N_\bullet$: la différentielle en degré l est donnée par

$$\mathrm{Hom}(M_{-l-s}, N_{-s}) \ni f \mapsto f \cdot d^{M_\bullet}_{-l-s+1} + (-1)^{l+1} d^{N_\bullet}_{-s} \cdot f$$

et par

$$M_{l-s} \otimes N_s \ni m \otimes n \mapsto d^{M_\bullet}_{l-s}(m) \otimes n + (-1)^{l-s} m \otimes d^{N_\bullet}_s(n)$$

respectivement.

Remarque A.1. *Observons que si r est impair, on a en général*

$$\mathrm{Hom}(M_\bullet, N_\bullet[r]) \neq \mathrm{Hom}(M_\bullet, N_\bullet)[r].$$

Par contre, les deux objets sont isomorphes par

$$a^{(r)}_{M_\bullet,N_\bullet} : \mathrm{Hom}(M_\bullet, N_\bullet[r]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(M_\bullet, N_\bullet)[r]$$

défini en degré l par

$$\bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} \overline{\mathrm{Hom}(M_{-l-s}, N_{-(s+r)})} \longrightarrow \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} \overline{\mathrm{Hom}(M_{-l-s}, N_{-(s+r)})}$$

$$(g_s) \mapsto ((-1)^{r(l+s)} g_s).$$

Ce morphisme est fonctoriel en $M_\bullet$, i.e. pour un morphisme $f : M_\bullet \longrightarrow M'_\bullet$ on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(M_\bullet, N_\bullet[r]) & \xrightarrow{a^{(r)}_{M_\bullet,N_\bullet}} & \mathrm{Hom}(M_\bullet, N_\bullet)[r] \\
{\scriptstyle f\circ -}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f\circ -} \\
\mathrm{Hom}(M'_\bullet, N_\bullet[r]) & \xrightarrow[a^{(r)}_{M'_\bullet,N_\bullet}]{} & \mathrm{Hom}(M'_\bullet, N_\bullet)[r].
\end{array}$$

Rappelons maintenant quelques points sur les résolutions injectives qui se trouvent dans [BH].

Définition A.2. [BH, p.98] Soit S un anneau commutatif noethérien et M un S-module. Une résolution injective

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_0(M) \xrightarrow{d_0} E_{-1}(M) \xrightarrow{d_{-1}} \ldots$$

est dite *minimale*, si $E_0(M)$ est une enveloppe injective de M et si pour $r \geq 1$, $E_{-r}(M)$ est une enveloppe injective de coker $(d_{-(r-1)})$.

Comme dans [BH] on note $E_S(M)$ une enveloppe injective d'un S-module M.

Remarque A.3. *Si S est un anneau de Gorenstein, le $-r$-ième terme d'une résolution injective minimale du S-module S est de la forme*

$$E_{-r}(S) = \bigoplus_{ht\,\mathfrak{p}=r} E_S(S/\mathfrak{p}).$$

De plus, on a le lemme suivant.

Lemme A.4. *Soient S un anneau commutatif noethérien, $I \subset S$ un idéal, M un S-module tel $IM = 0$ et $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\ S$ un idéal premier.*

1. *Si I n'est pas contenu dans $\mathfrak{q}$, alors $\mathrm{Hom}_S(M, E_S(S/\mathfrak{q})) = 0$.*
2. *Si $I \subset \mathfrak{q}$, alors on a un homomorphisme injectif*

$$\alpha : E_{S/I}(S/\mathfrak{q}) \longrightarrow E_S(S/\mathfrak{q})$$

et l'homomorphisme

$$\alpha_* : \mathrm{Hom}_{S/I}(M, E_{S/I}(S/\mathfrak{q})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(M, E_S(S/\mathfrak{q})), \quad \varphi \mapsto \alpha\varphi$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Par exemple [Gil3, Lem. 3.3.5]. □

Le lemme suivant nous est utile par la suite :

Lemme A.5. *La suite spectrale des groupes de Witt de catégories triangulées filtrées avec dualité est fonctorielle pour les foncteurs qui préservent la dualité et qui sont compatibles avec les filtrations respectives.*

Démonstration. [BW, Lem. 4.2] □

Rappelons un résultat de la section 5.1 que l'on utilise par la suite :

Lemme A.6. *Soit X un schéma noethérien et $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre cohérente, alors le morphisme naturel*

$$D^b_c(\mathcal{M}_{qc}(\mathcal{A})) \longrightarrow D^b_c(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. [Gil1, Lem. 1.4] □

A.1 Énoncé du théorème

Convention. *Tous les schémas (anneaux) sont désormais supposés noethériens et munis d'un morphisme vers* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ *(des $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$-algèbres).*

Tout au long de cet appendice on utilise les notations suivantes : Soit $X = \operatorname{Spec} R$ un schéma (noethérien), affine, de Gorenstein, connexe et de dimension de Krull finie n et soient (A, τ) et (B, ν) deux algèbres d'Azumaya à involutions de première espèce sur X. Soit de plus P un A-module fidèlement projectif, voir la définition 2.1, (ceci revient à dire que P est un A-module fidèle qui est projectif comme R-module) et

$$h : P \xrightarrow{\sim} P^\sharp := \overline{\operatorname{Hom}_A(P, A)}$$

un (A, τ)-espace ϵ_0-hermitien où $\epsilon_0 \in \{\pm 1\}$.

Soit $u : Z \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé de Gorenstein défini par un idéal $\mathfrak{a} \subset R$, i.e. $Z = \operatorname{Spec} R/\mathfrak{a}$. Notons P_Z et h_Z les restrictions de P et h à Z. Considérons alors la condition suivante :

Condition A.7. *Le triplet (Z, P_Z, h_Z) satisfait à :*

1. $B/\mathfrak{a} \simeq \operatorname{End}_{A/\mathfrak{a}}(P_Z)$,
2. $\nu/\mathfrak{a}$ *est l'involution adjointe sur $B/\mathfrak{a}$ définie par*

$$(\nu/\mathfrak{a})(g) := h_Z^{-1} \circ g^\flat \circ h_Z,$$

où $g^\flat = \operatorname{Hom}_{A/\mathfrak{a}}(g, A/\mathfrak{a})$, voir section 2.3.1.

Notons maintenant $I_\bullet$ une résolution injective du R-module R. C'est alors un complexe dualisant sur $\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}_{qc} R)$. On peut supposer qu'il est de la forme :

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_{-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_n \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

avec I_i en degré i et qu'il est une résolution injective minimale (cf. définition A.2). Supposons maintenant que le sous-schéma de Gorenstein Z est connexe. Comme Z est de Gorenstein, les points maximaux de Z (correspondant aux idéaux premiers minimaux de $R/\mathfrak{a}$) sont tous de la même codimension dans

X, disons r (voir [Ei, Cor. 18.10]). On obtient alors une résolution injective $J_\bullet \simeq \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, I_\bullet[r])$ du $R/\mathfrak{a}$-module $R/\mathfrak{a}$, définie par

$$J_{-s} := \{x \in I_{-(s+r)} \mid \mathfrak{a} \cdot x = 0\},$$

en degré $-s$ avec $J_{-s} = 0$ si $-s \geq 0$ (voir lemme A.4). C'est un complexe dualisant pour le schéma Z, puisque $R/\mathfrak{a}$ est un anneau de Gorenstein. Énonçons le théorème que l'on va prouver dans cet appendice :

Théorème A.8. *Sous les notations et hypothèses ci-dessus, supposons que le triplet (X, P, h) satisfait à la condition A.7. Il existe alors une équivalence de catégories avec dualités*

$$\left(\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(A)), \mathfrak{D}^{(A,\tau)}_I, 1, \varpi^I\right) \xrightarrow[\sim]{(\mathrm{F}_{(X,P,h)}, \phi^{(0)}_{(X,P,h)})} \left(\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(B)), \mathfrak{D}^{(B,\nu)}_I, 1, \epsilon_0 \cdot \varpi^I\right)$$

qui respecte les filtrations par la codimension de ces catégories (cf. (5.2)). Soit $u : Z \hookrightarrow X$ un sous-schéma de Gorenstein connexe défini par un idéal $\mathfrak{a}$ de codimension r. Alors le triplet (Z, P_Z, h_Z) satisfait également à la condition A.7 et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\left(\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(A)), T^r \cdot\mathfrak{D}^{(A,\tau)}_I, (-1)^r, (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}\varpi^I\right) & \xrightarrow{(\mathrm{F}_{(X,P,h)}, \phi^{(r)}_{(X,P,h)})} & \left(\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(B)), T^r \cdot\mathfrak{D}^{(B,\nu)}_I, (-1)^r, (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}\epsilon_0 \cdot \varpi^I\right) \\
\uparrow{\scriptstyle (u_*{}^A, \eta^A)} & & \uparrow{\scriptstyle (u_*{}^B, \eta^B)} \\
\left(\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(A/\mathfrak{a})), \mathfrak{D}^{(A/\mathfrak{a}, \tau/\mathfrak{a})}_J, 1, \varpi^J\right) & \xrightarrow{(\mathrm{F}_{(Z,P_Z,h_Z)}, \phi^{(0)}_{(Z,P_Z,h_Z)})} & \left(\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(B/\mathfrak{a})), \mathfrak{D}^{(B/\mathfrak{a}, \nu/\mathfrak{a})}_J, 1, \epsilon_0 \cdot \varpi^J\right).
\end{array}$$

où les flèches verticales sont les foncteurs de dévissage que l'on rappelle dans la section A.3.1 et les autres notations sont comme plus haut.

Corollaire A.9. *Soit $p \leq n$. Supposons qu'il existe un A-module projectif P et un (A, τ)-espace ϵ_0-hermitien (P, h) tels que pour tout sous-ensemble fini $\{x_1, ..., x_s\} \subset X^{(t)}$ avec $t \geq p$ et $s \in \mathbb{N}$,*

1. *le schéma $Z^t_{1,...,s} := \overline{\{x_1\}} \cup ... \cup \overline{\{x_s\}}$ avec la structure de sous-schéma réduit induite est de Gorenstein et que*
2. *le triplet $(Z^t_{1,..,s}, P_{Z_{1,...,s}}, h_{Z_{1,...,s}})$ satisfait à la condition A.7.*

Alors, pour tout $q \in \mathbb{Z}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
\bigoplus_{x \in X^{(p)}} W^q_{A_x,\tau_x} & \xrightarrow{d_1^{p,q}} & \bigoplus_{x \in X^{(p+1)}} W^q_{A_x,\tau_x} & \xrightarrow{d_1^{p+1,q}} & \cdots & \xrightarrow{d_1^{n-1,q}} & \bigoplus_{x \in X^{(n)}} W^q_{A_x,\tau_x} \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr & & & & \wr\downarrow \\
\bigoplus_{x \in X^{(p)}} W^{q+1-\epsilon_0}_{B_x,\nu_x} & \xrightarrow{d_1^{p,q+1-\epsilon_0}} & \bigoplus_{x \in X^{(p+1)}} W^{q+1-\epsilon_0}_{B_x,\nu_x} & \xrightarrow{d_1^{p+1,q+1-\epsilon_0}} & \cdots & \xrightarrow{d_1^{n-1,q+1-\epsilon_0}} & \bigoplus_{x \in X^{(n)}} W^{q+1-\epsilon_0}_{B_x,\nu_x},
\end{array}$$

où pour $x \in X^{(i)}$

$$W^q_{A_x,\tau_x} := W^q(\mathcal{M}_{lf}(A_x), \tau_x, E_x) \quad \textit{et} \quad W^q_{B_x,\nu_x} := W^q(\mathcal{M}_{lf}(B_x), \nu_x, E_x)$$

avec $E_x = (I_{-i})_x$. Dans ce diagramme les flèches horizontales sont les différentielles de la suite spectrale $E_1^{s,t}(A,\tau,R)$ (respectivement $E_1^{s,t}(B,\nu,R)$) introduite dans la section 5.2.1 et les flèches verticales sont les homomorphismes induits sur les termes de ces suites spectrales par les foncteurs de dévissage $(u^A_{\overline{\{x\}}*},\eta^A)$ $(u^B_{\overline{\{x\}}*},\eta^B)$ et le foncteur $\mathrm{F}_{(\overline{\{x\}},P_{\overline{\{x\}}},h_{\overline{\{x\}}})}$ pour $x\in X$, où $u_{\overline{\{x\}}}:\overline{\{x\}}\hookrightarrow X$ est l'immersion fermée.

Démonstration. Posons la notation suivante : Soit $u_Z : Z\hookrightarrow X$ un schéma tel que le triplet (Z,P_Z,h_Z) satisfait à la condition A.7 et soit $z\in Z$. Alors on note $\mathrm{F}_{Z,z}$ l'homomorphisme

$$W^q_{A_z,\tau_z}\longrightarrow W^{q+1-\epsilon_0}_{B_z,\nu_z}$$

induit sur les termes des suites spectrales $E_1^{s,t}(A,\tau,R)$ et $E_1^{s,t}(B,\nu,R)$ par les foncteurs de dévissage (u^A_{Z*},η^A) (u^B_{Z*},η^B) et le foncteur $\mathrm{F}_{(Z,P_Z,h_Z)}$.

Soit $t\in\{p,...,n-1\}$. Il s'agit de montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{x\in X^{(t)}} W^q_{A_x,\tau_x} \arrow[r, "d_1^{t,q}"] \arrow[d, "\oplus \mathrm{F}_{\overline{\{x\}},x}"'] & \bigoplus\limits_{x\in X^{(t+1)}} W^q_{A_x,\tau_x} \arrow[d, "\oplus \mathrm{F}_{\overline{\{x\}},x}"] \\
\bigoplus\limits_{x\in X^{(t)}} W^{q+1-\epsilon_0}_{B_x,\nu_x} \arrow[r, "d_1^{t,q+1-\epsilon_0}"] & \bigoplus\limits_{x\in X^{(t+1)}} W^{q+1-\epsilon_0}_{B_x,\nu_x}.
\end{tikzcd}\qquad (*)$$

Soit alors $(a_1,...,a_m)\in\bigoplus\limits_{x\in X^{(t)}} W^q_{A_x,\tau_x}$. Supposons $a_i\in W^q_{A_{x_i},\tau_{x_i}}$ avec $x_i\in X^{(t)}$ pour $1\le i\le m$. Soit $Y:=\overline{\{x_1\}}\cup...\cup\overline{\{x_m\}}$. Observons que l'on a donc $X^{(t)}\cap Y=\{x_1,...,x_m\}$. La première partie du théorème A.8 nous fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{x_i\in\{x_1,...,x_m\}} W^q_{A_{x_i},\tau_{x_i}} \arrow[r, "d_1^{t,q}|_{\{x_1,...,x_m\}}"] \arrow[d, "\oplus \mathrm{F}_{Y,x_i}"'] & \bigoplus\limits_{x\in X^{(t+1)}\cap Y} W^q_{A_x,\tau_x} \arrow[d, "\oplus \mathrm{F}_{Y,x}"] \\
\bigoplus\limits_{x_i\in\{x_1,...,x_m\}} W^{q+1-\epsilon_0}_{B_{x_i},\nu_{x_i}} \arrow[r, "d_1^{t,q+1-\epsilon_0}|_{\{x_1,...,x_m\}}"] & \bigoplus\limits_{x\in X^{(t+1)}\cap Y} W^{q+1-\epsilon_0}_{B_x,\nu_x}.
\end{tikzcd}\qquad (**)$$

La deuxième partie du théorème A.8 appliquée à $Z=\overline{\{x_i\}}$ et $X=Y$ montre que la flèche F_{Y,x_i} ne dépend pas de Y, i.e. $\mathrm{F}_{Y,x_i}=\mathrm{F}_{\overline{\{x_i\}},x_i}$ pour tout $i\in\{1,..,n\}$. Soit maintenant $x\in X^{(t+1)}$. Donc la deuxième partie du théorème A.8 appliquée avec $Z=\overline{\{x\}}$ et $X=Y$ montre que la flèche $\mathrm{F}_{Y,x}$ ne dépend pas non plus de Y, i.e. $\mathrm{F}_{Y,x}=\mathrm{F}_{\overline{\{x\}},x}$. En tenant compte de la commutativité du diagramme $(**)$ on a alors

$$\Big[\Big(\bigoplus_{x\in X^{(t+1)}}\mathrm{F}_{\overline{\{x\}},x}\Big)\circ d_1^{t,q}\Big]\,(a_1,...,a_m)=\Big[d_1^{t,q+1-\epsilon_0}\circ\Big(\bigoplus_{x\in X^{(t)}}\mathrm{F}_{\overline{\{x\}},x}\Big)\Big]\,(a_1,...,a_m),$$

i.e. le diagramme $(*)$ commute aussi. □

Remarque A.10. *On peut probablement prouver le théorème A.8 (et donc le corollaire A.9 aussi) sous l'hypothèse plus générale que* X *est un schéma (noethérien) admettant un complexe dualisant et pour* $u : Z \hookrightarrow X$ *un sous-schéma fermé quelconque. En effet [Gil7] montre que* Z *admet alors également un complexe dualisant et que l'on obtient des foncteurs de dévissage* $({u_*}^A, \eta^A)$ $({u_*}^B, \eta^B)$*. Pourtant la preuve de la proposition A.11 se simplifie en supposant que* X *est de Gorenstein, puisque dans ce cas on peut travailler avec les modules de Gorenstein de dimension* 0 *(voir section A.2). De plus, le théorème A.8 est suffisant pour nos fins dans sa présente forme.*

A.2 L'existence du foncteur de Morita F

Dans cette section on prouve le théorème A.8 pour le cas où $X = Z$ et $u = \mathrm{id}$. Ceci revient à construire le foncteur $(\mathrm{F}_{(X,P,h)}, \phi^{(0)}_{(X,P,h)})$. Ensuite on généralise ce théorème au cas d'un sous-schéma fermé de Gorenstein quelconque.

Proposition A.11. *Si* $X = Z$ *et* $u : Z \hookrightarrow X$ *est l'identité, alors le théorème A.8 est vrai.*

Avant de commencer la preuve, prouvons quelques résultats préliminaires. Introduisons d'abord la notion de module de Gorenstein de dimension 0 (cf. [Gil1, 2.11]). Un module de *Gorenstein de dimension* 0 est un R-module M tel que $\mathrm{Ext}^i_R(M, R) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Notons la catégorie de ces modules $\mathcal{E}(R)$. C'est une catégorie exacte contenant $\mathcal{P}(R)$, les R-modules projectifs de rang fini. Par [Gil3, Thm. 2.15] tous les modules dans $\mathcal{E}(R)$ sont réflexifs et $\mathfrak{D}_R := \mathrm{Hom}_R(\_, R)$ est une dualité sur $\mathcal{E}(R)$. Notons $\mathcal{E}_b(A) := \mathcal{E}(R) \cap \mathcal{M}(A)$.

Il est bien connu que la première hypothèse de la condition A.7 implique que l'on a une équivalence de catégories $\mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathcal{M}(B)$, dite équivalence de Morita :

$$\mathrm{F}' : M \mapsto \mathrm{Hom}_A(P, M).$$

Comme P est un A-module projectif, on dispose d'un isomorphisme naturel

$$\varphi_M : \mathrm{Hom}_A(P, A) \otimes_A M \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_A(P, M)$$

pour tout $M \in \mathcal{M}(A)$, [Kn, I.9.1.5]. On obtient donc l'équivalence de Morita aussi par

$$\mathrm{F} : M \mapsto Q \otimes_A M,$$

où Q est le A-module à droite (et B-module à gauche) $\mathrm{Hom}_A(P, A)$.

Le lemme suivant montre que l'équivalence de Morita se restreint à la sous-catégorie des modules de Gorenstein de dimension 0.

Lemme A.12. *L'équivalence de Morita* $\mathcal{M}(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(B)$ *se restreint en une équivalence de catégories* $\mathcal{E}_b(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_b(B)$*.*

Démonstration. Il s'agit de vérifier que si $M \in \mathcal{M}(A)$ est tel que $\mathrm{Ext}^i_R(M, R) = 0$ pour tout $i \geq 1$, alors

$$\mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Hom}_A(P, M), R) = \mathrm{Ext}^i_R(Q \otimes_A M, R) = 0$$

pour tout $\mathcal{M} \in \mathcal{E}_b(A)$ et tout $i \geq 1$. Il suffit de montrer cela pour $P = A$. Comme $\mathrm{Hom}_A(A, M) \simeq A \otimes_A M \simeq M$, le lemme suit. Observons que pour F' l'équivalence inverse de $\mathcal{E}_b(B) \longrightarrow \mathcal{E}_b(A)$ est donnée par $N \mapsto \mathrm{Hom}_B(Q, N)$ et pour F elle est donnée par $N \longrightarrow P \otimes_B N$, cf. [Kn, I.9.1.3, 3)]. $\square$

Dans notre cas, on dispose d'un (A, τ)-espace ϵ_0-hermitien

$$h : P \longrightarrow \overline{\mathrm{Hom}_A(P, A)}.$$

Observons que l'on a donc un (B, ν)-espace ϵ_0-hermitien

$$\widetilde{h} : Q \longrightarrow \overline{\mathrm{Hom}_B(Q, B)},$$

où Q est vu ici comme B-module à gauche. En effet, l'isomorphisme des B-modules à gauches

$$h : \overline{P} \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, A)$$

est B-lineaire. Par [Kn, I.9.1.3. 3)] on a un isomorphisme de A-B-bimodules $P \simeq \mathrm{Hom}_B(Q, B)$ et par définition $Q = \mathrm{Hom}_A(P, A)$. On obtient donc un isomorphisme

$$\widetilde{h} := h^{-1} : Q \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{Hom}_B(Q, B)}.$$

Rappelons également que l'on dispose de deux dualités différentes sur $\mathcal{E}_b(A)$ et $\mathcal{E}_b(B)$:

1. La catégorie $\mathcal{E}_b(A)$ est munie de la dualité $\overline{\mathrm{Hom}_A(\_, A)}$ et $\mathcal{E}_b(B)$ est munie de la dualité $\overline{\mathrm{Hom}_B(\_, B)}$.
2. Les deux catégories sont munies des dualités $\overline{\mathrm{Hom}_R(\_, R)}$ (pour les involutions τ et ν respectivement).

Par le lemme 5.6 et (5.1) les traces réduites $\mathrm{tr}_{A\,/\,R}$ et $\mathrm{tr}_{B\,/\,R}$ induisent des isomorphismes

$$\rho_{\_,A} : \overline{\mathrm{Hom}_A(\_, A)} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{Hom}_R(\_, R)}$$

et

$$\rho_{\_,B} : \overline{\mathrm{Hom}_B(\_, B)} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{Hom}_R(\_, R)}.$$

Il suit que les deux dualités sur $\mathcal{E}_b(A)$ (resp. $\mathcal{E}_b(B)$) sont isomorphes. On obtient donc un espace ϵ_0-hermitien

$$h' : P \xrightarrow{h} \overline{\mathrm{Hom}_A(P, A)} \xrightarrow{\rho_{P,A}} \overline{\mathrm{Hom}_R(P, R)}$$

pour la dualité $\overline{\mathrm{Hom}_R(\_, R)}$ sur $\mathcal{E}_b(A)$ et également un espace ϵ_0-hermitien

$$\widetilde{h}' : Q \xrightarrow{\widetilde{h}} \overline{\mathrm{Hom}_B(Q, B)} \xrightarrow{\rho_{Q,B}} \overline{\mathrm{Hom}_R(Q, R)}$$

pour la dualité $\overline{\mathrm{Hom}_R(\_, R)}$ sur $\mathcal{E}_b(B)$. Soit

$$b' : P \times P \longrightarrow R$$

la forme ϵ_0-hermitienne adjointe à h' [Kn, I.2.2.] et soit

$$\widetilde{b}' : Q \times Q \longrightarrow R$$

la forme ϵ_0-hermitienne adjointe à $\widetilde{h}'$. Par des résultats dans [Kn], on obtient alors des équivalences qui préservent les dualités sur les sous-catégories des modules de Gorenstein de dimension 0. Plus précisément, on a la proposition suivante :

Proposition A.13. *1. L'équivalence de catégories* F' *devient un foncteur qui préserve les dualités induites par* $\overline{\mathrm{Hom}_A(\_, A)}$ *sur* $\mathcal{E}_b(A)$ *et par* $\overline{\mathrm{Hom}_B(\_, B)}$ *sur* $\mathcal{E}_b(B)$ *avec la transformation de dualités*

$$\phi'_M : \mathrm{Hom}_A(P, \overline{\mathrm{Hom}_A(M, A)}) \longrightarrow \overline{\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(P, M), B)}$$

définie par

$$f \mapsto (g \mapsto h^{-1} \circ f^\sharp \circ \varpi_M^\sharp \circ g),$$

cf. [Kn, II.3, p.82].

2. L'équivalence de catégories F *devient un foncteur qui préserve les dualités induites par* $\overline{\mathrm{Hom}_R(\_, R)}$ *sur* $\mathcal{E}_b(A)$ *et par* $\overline{\mathrm{Hom}_R(\_, R)}$ *sur* $\mathcal{E}_b(B)$ *avec la transformation de dualités*

$$\phi_M : Q \otimes_A \overline{\mathrm{Hom}_R(M, R)} \longrightarrow \overline{\mathrm{Hom}_R(Q \otimes_A M, R)}$$

donnée par

$$\phi_M = (\rho^{-1}_{Q \otimes M, B}) \circ \overline{\mathrm{Hom}_B(\varphi_M, B)} \circ \phi'_M \circ \varphi_{\overline{\mathrm{Hom}_A(M,A)}} \circ (\mathrm{id}_Q \otimes \rho_{M,A}).$$

Explicitement, l'homomorphisme ϕ_M *est donnée par*

$$q \otimes f \ \mapsto \ (\, q' \otimes m \mapsto \mathrm{tr}_{B\,/\,R}(\widetilde{b}'(q, q'))\, f(m)\,),$$

Les deux foncteurs envoient un (A, τ)*-espace* ϵ*-hermitien sur un* (B, ν)*-espace* $\epsilon\epsilon_0$*-hermitien et ils sont isométriques. Ils induisent en particulier les mêmes isomorphismes sur les groupes de Witt.*

Démonstration. Pour la première partie, il s'agit de reproduire la preuve de [Kn, II.3, p.82-83], en vu du lemme A.12. La deuxième est une conséquence de [Kn, II.3.4.2]. □

Démonstration de la proposition A.11. Il s'agit d'étendre ce résultat au catégories dérivées, puis au groupes de Witt. Étendons d'abord le résultat aux catégories dérivées de $\mathcal{E}_b(A)$ et $\mathcal{E}_b(B)$. Soient $\mathfrak{D}_R^{(A,\tau)}$ et $\mathfrak{D}_R^{(B,\nu)}$ les dualités (dérivées) $\overline{\mathrm{Hom}_R(\_, R)}$ sur $\mathcal{E}_b(A)$ ($D^b(\mathcal{E}_b(A))$) et $\mathcal{E}_b(A)$ ($D^b(\mathcal{E}_b(B))$). Le morphisme de bi-dual est noté ϖ^R dans les deux cas. Alors un espace symétrique dans
$(\mathcal{E}_b(A), \mathfrak{D}_R^{(A,\tau)}, \varpi^R)$ est la même chose qu'un espace anti-symétrique dans $(\mathcal{E}_b(A), \mathfrak{D}_R^{(A,\tau)}, \epsilon_0 \cdot \varpi^R)$. En tenant compte de l'isomorphisme (5.1), c'est-à-dire que le foncteur de Morita induit une équivalence de catégories exactes avec dualité :

$$\Big(\mathcal{E}_b(A), \mathfrak{D}_R^{(A,\tau)}, \varpi^R\Big) \xrightarrow{\simeq} \Big(\mathcal{E}_b(B), \mathfrak{D}_R^{(B,\nu)}, \epsilon_0 \cdot \varpi^R\Big).$$

On peut maintenant dériver cette équivalence et on obtient une équivalence de catégories triangulées avec dualité 1-exacte :

$$\Big(\mathrm{D}^b(\mathcal{E}_b(A)), \mathfrak{D}_R^{(A,\tau)}, 1, \varpi^R\Big) \xrightarrow{\simeq} \Big(\mathrm{D}^b(\mathcal{E}_b(B)), \mathfrak{D}_R^{(B,\nu)}, 1, \epsilon_0 \cdot \varpi^R\Big). \qquad \text{(A.1)}$$

Ensuite, observons qu'un résultat de Bass [Bs1, Thm. 8.2] montre que le foncteur naturel $\mathrm{D}^b(\mathcal{E}_b(A)) \longrightarrow \mathrm{D}_c^b(\mathcal{M}_{qc}(A))$ est une équivalence (cf. [Gil1, 2.11]). En choisissant un quasi-isomorphisme $R \xrightarrow{\sim} I_\bullet$, on obtient une équivalence de catégories avec dualités 1-exactes

$$\Big(\mathrm{D}^b(\mathcal{E}_b(A)), \mathfrak{D}_R^{(A,\tau)}, 1, \varpi^R\Big) \xrightarrow{\simeq} \Big(\mathrm{D}_c^b(\mathcal{M}_{qc}(A)), \mathfrak{D}_{I_\bullet}^{(A,\tau)}, 1, \varpi^{I_\bullet}\Big),$$

où $\mathfrak{D}_{I_\bullet}^{(A,\tau)}$ désigne la dualité $\overline{\mathrm{Hom}_R(\_, I_\bullet)}$ sur $\mathrm{D}_c^b(\mathcal{M}_{qc}(A))$ et $\mathrm{D}_c^b(\mathcal{M}_{qc}(B))$, et où ϖ^I est le morphisme de bidualité correspondant. Une telle équivalence existe également pour (B,ν), donc l'équation (A.1) se traduit alors, en vu du lemme A.6, en une équivalence des catégories triangulées avec dualité 1-exacte (dans le sens de [Gil6, Sect. 1.1]) :

$$\mathrm{F} : \Big(\mathrm{D}_c^b(\mathcal{M}(A)), \mathfrak{D}_I^{(A,\tau)}, 1, \varpi^I\Big) \xrightarrow{\simeq} \Big(\mathrm{D}_c^b(\mathcal{M}(B)), \mathfrak{D}_I^{(B,\nu)}, 1, \epsilon_0 \cdot \varpi^I\Big)$$

avec une transformation de dualités

$$\phi : \mathrm{F} \cdot \mathfrak{D}_I^{(A,\tau)} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{D}_I^{(B,\nu)} \cdot \mathrm{F},$$

qui est une extension du morphisme ϕ de [Kn, II.3, p.82] aux catégories dérivées. On donne une description détaillée de l'isomorphisme naturel ϕ dans la preuve du théorème A.15. On pose alors $\mathrm{F}_{(X,P,h)} := \mathrm{F}$ et $\phi^{(0)}_{(X,P,h)} := \phi$ et la preuve de la proposition est terminée.

A.3 Le cas général

Il reste maintenant à démontrer le cas général où $u : Z \hookrightarrow X$ est une immersion fermée et Z est un sous-schéma fermé connexe de Gorenstein quelconque. Pour cela nous introduisons le foncteur de dévissage (cf. [Gil7, Lem. 2.5] et [Gil6, Sect. 3.4]).

A.3.1 Le foncteur de dévissage u_*

On peut supposer que X est connexe et que notre résolution injective $I_\bullet$ de R est une résolution injective minimale (cf. définition A.2). Comme Z est de Gorenstein et connexe, les points maximaux de Z (correspondant aux idéaux premiers minimaux de $R/\mathfrak{a}$) sont tous de la même codimension dans X, disons r (voir [Ei, Cor.18.10]). On obtient alors une résolution injective $J_\bullet \simeq \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, I_\bullet[r])$ du $R/\mathfrak{a}$-module $R/\mathfrak{a}$, définie par

$$J_{-s} := \{x \in I_{-(s+r)} \mid \mathfrak{a} \cdot x = 0\},$$

en degré $-s$ avec $J_{-s} = 0$ si $-s \geq 0$ (voir lemme A.4), qui est en fait une résolution injective minimale. C'est un complexe dualisant pour le schéma Z. On considère alors les foncteurs de dévissage suivants (cf. [Gil1, Sect. 5.1]) :

$$\Big(\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(A\,/\mathfrak{a})), \mathfrak{D}_J^{(A\,/\mathfrak{a},\tau/\mathfrak{a})}, 1, \varpi^J\Big) \xrightarrow{({u_*}^A,\eta^A)} \Big(\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(A)), T^r\cdot\mathfrak{D}_I^{(A,\tau)}, (-1)^r, (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}\varpi^I\Big)$$

et

$$\Big(\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(B\,/\mathfrak{a})), \mathfrak{D}_J^{(B\,/\mathfrak{a},\nu/\mathfrak{a})}, \epsilon_0\cdot\varpi^J\Big) \xrightarrow{({u_*}^B,\eta^B)} \Big(\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(B)), T^r\cdot\mathfrak{D}_I^{(B,\nu)}, (-1)^r, (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}\varpi^I\Big).$$

On se limite à expliciter le foncteur $({u_*}^A, \eta^A)$ puisque le foncteur $({u_*}^B, \eta^B)$ est analogue. On a

$$\begin{aligned} {u_*}^A : \mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(A\,/\mathfrak{a})) &\longrightarrow \mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(A)) \\ M_\bullet &\mapsto {}_A\, M_\bullet \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {u_*}^B : \mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(B\,/\mathfrak{a})) &\longrightarrow \mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(B)) \\ M_\bullet &\mapsto {}_B\, M_\bullet \end{aligned}$$

où ${}_A\, M_\bullet$ (resp. ${}_B\, M_\bullet$) est le complexe en $A\,/\mathfrak{a}$-modules (resp. $B\,/\mathfrak{a}$-modules) $M_\bullet$ vu comme complexe en $A_\bullet$-modules (resp. B-modules $M_\bullet$). La transformation naturelle

$$\eta^A : {u_*}^A \;\cdot\; \mathfrak{D}_J^{(A\,/\mathfrak{a},\tau/\mathfrak{a})} \longrightarrow (T^r\cdot\mathfrak{D}_I^{(A,\tau)}) \;\cdot\; {u_*}^A$$

est définie comme suit. Soit $M_\bullet \in \mathrm{D}^b_c(A/\mathfrak{a})$. Le morphisme $\eta^A_{M_\bullet}$

$$\eta^A_{M_\bullet} :{}_A\,\overline{\mathrm{Hom}_{R\,/\mathfrak{a}}(M_\bullet, J_\bullet)} \longrightarrow \overline{\mathrm{Hom}_R({}_A M_\bullet, I_\bullet)}\,[r\,]$$

est défini (cf. [Gil6, 3.4]) en dégré i par (pour les conventions des signes, voir le début de ce chapitre)

$$\bigoplus_{s=0}^{n-r}\overline{\mathrm{Hom}_{R\,/\mathfrak{a}}(M_{-i-s}, J_{-s})} \longrightarrow \bigoplus_{s=-r}^{n-r}\overline{\mathrm{Hom}_R({}_A M_{-i-s}, I_{-(s+r)})}$$

$$(f_0, ..., f_{n-r}) \mapsto (0, .., 0, (-1)^{ri}\iota_0 f_0, (-1)^{r(i+1)}\iota_1 f_1, ..., (-1)^{r(i+n-r)}\iota_{n-r} f_{n-r}),$$

où $\iota_s : J_{-s} \hookrightarrow I_{-(s+r)}$ (cf. [Gil6, 3.4]). Observons que ceci est bien un isomorphisme par la remarque A.3 et par le lemme A.4. On vérifie que la transformation naturelle ainsi définie est bien une transformation de dualités, cf. [Gil6, 3.4].

Remarque A.14. *On observe que le morphisme $\eta^A_{M_\bullet}$ est (trivialement) la composition des morphismes*

$${}_A\overline{\mathrm{Hom}_{R\,/\mathfrak{a}}(M_\bullet, J_\bullet)} \xrightarrow{\widetilde{\eta}^A_{M_\bullet}} \overline{\mathrm{Hom}_R({}_A M_\bullet, I_\bullet\,[r\,])} \xrightarrow{a^{(r)}} \overline{\mathrm{Hom}_R({}_A M_\bullet, I_\bullet)}\,[r\,],$$

où $\widetilde{\eta}^A_{M_\bullet}$ est le morphisme de complexes défini en degré i par

$$\bigoplus_{s=0}^{n-r}\overline{\mathrm{Hom}_{R\,/\mathfrak{a}}(M_{-i-s}, J_{-s})} \longrightarrow \bigoplus_{s=-r}^{n-r}\overline{\mathrm{Hom}_R({}_A M_{-i-s}, I_{-(s+r)})}$$

$$(f_0, ..., f_{n-r}) \mapsto (0, .., 0, \iota_0 f_0, \iota_1 f_1, ..., \iota_{n-r} f_{n-r})$$

et où $a^{(r)} = a^{(r)}_{M_\bullet, I_\bullet}$ est l'isomorphisme de complexes défini dans la remarque A.1, i.e. en degré i on a

$$\bigoplus_{s=-r}^{n-r} \overline{\mathrm{Hom}_R({}_A M_{-i-s}, I_{-(s+r)})} \longrightarrow \bigoplus_{s=-r}^{n-r} \overline{\mathrm{Hom}_R({}_A M_{-i-s}, I_{-(s+r)})}$$

$$(g_{-r}, ..., g_{n-r}) \mapsto ((-1)^{r(i-r)} g_{-r}, (-1)^{r(i-r+1)} g_{-r+1}, ..., (-1)^{ri} g_0, ..., (-1)^{r(i+n-r)} g_{n-r}).$$

A.3.2 Compatibilité des foncteurs F et u_*

Il reste à montrer que l'équivalence de Morita F est compatible avec le foncteur de dévissage u_*.

Soient (A, τ) et (B, ν) deux algèbres d'Azumaya sur R à involutions de première espèce et (P, h') un (A, τ) espace ϵ_0-hermitien tel que le triplet (X, P, h) satisfait à la condition A.7. Alors on a

$$B \simeq \mathrm{End}_A(P)$$

et ν est l'involution adjointe sur B définie par

$$\nu(g) := h^{-1} \circ g^\sharp \circ h,$$

où on rappelle que $g^\sharp = \mathrm{Hom}_A(g, A)$, cf. section 2.3.1.
Selon [Kn, I.2.2.], l'espace

$$h : P \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{Hom}_A(P, A)}$$

correspond à une forme ϵ_0-hermitienne (régulière)

$$b : P \times P \longrightarrow A$$

telle que $h : x \mapsto (y \mapsto b(x, y))$. Observons que si $x \in \mathfrak{a}\, P$, alors $b(x, y) \in \mathfrak{a}\, A$ pour tout $y \in P$, par sesquilinéarité. On obtient donc une forme ϵ_0-hermitienne régulière

$$\overline{b} : P\,/\mathfrak{a} \times P\,/\mathfrak{a} \longrightarrow A\,/\mathfrak{a}$$

Elle induit un espace ϵ_0-hermitien

$$\overline{h} : P/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{a}}(P\,/\mathfrak{a}, A\,/\mathfrak{a})}$$

$$\overline{h} : \overline{x} \mapsto (\overline{y} \mapsto \overline{b}(\overline{x}, \overline{y})).$$

Et on voit que le triplet (Z, P_Z, h_Z) (où $Z = \mathrm{Spec}\, R\,/\mathfrak{a}$ et donc $P\,/\mathfrak{a} = P_Z$ et $\overline{h} = h_Z$) satisfait également à cette condition, i.e. on a

$$B\,/\mathfrak{a} \simeq \mathrm{End}_{A\,/\mathfrak{a}}(P\,/\mathfrak{a})$$

et $\overline{\nu}$ est l'involution adjointe sur $B\,/\mathfrak{a}$ définie par

$$\overline{\nu}(\overline{g}) := \overline{h}^{-1} \circ \overline{g}^\flat \circ \overline{h},$$

où $\overline{g}^\flat = \mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{a}}(\overline{g}, A/\mathfrak{a})$. Dans la section A.2 on a observé que l'on obtient à partir de h un (B,ν)-espace ϵ_0-hermitien

$$\widetilde{h} : Q \longrightarrow \overline{\mathrm{Hom}_B(Q,B)}.$$

De la même façon, on obtient à partir de $\overline{h}$ un $(\overline{B},\overline{\nu})$-espace ϵ_0-hermitien

$$\widetilde{\overline{h}} : Q/\mathfrak{a} \longrightarrow \overline{\mathrm{Hom}_{B/\mathfrak{a}}(Q/\mathfrak{a}, B/\mathfrak{a})}.$$

Notons, comme dans la section A.2,

$$\overline{h}' : P/\mathfrak{a} \longrightarrow \overline{\mathrm{Hom}_{R/\mathfrak{a}}(P/\mathfrak{a}, R/\mathfrak{a})},$$

et

$$\widetilde{\overline{h}}' : Q/\mathfrak{a} \longrightarrow \overline{\mathrm{Hom}_{R/\mathfrak{a}}(Q/\mathfrak{a}, R/\mathfrak{a})}.$$

les espaces ϵ_0-hermitiens obtenus par le lemme 5.6 et l'équation (5.1) pour les dualités $\overline{\mathrm{Hom}_{R/\mathfrak{a}}(\_, R/\mathfrak{a})}$ sur $\mathrm{D}^b(\mathcal{E}_b(A))$ et $\mathrm{D}^b(\mathcal{E}_b(B))$ respectivement. Ensuite notons $\overline{b}'$ la forme hermitienne adjointe à $\overline{h}'$ et $\widetilde{\overline{b}}'$ la forme hermitienne adjointe à $\widetilde{\overline{h}}'$.

Pour démontrer le théorème A.8 dans le cas général il s'agit donc de démontrer la compatibilité suivante :

Théorème A.15. *Avec les notations comme plus haut, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc}
\Big(\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(A)), T^r\cdot\mathfrak{D}_I^{(A,\tau)}, (-1)^r, (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}\varpi^I\Big) & \xrightarrow{(\mathrm{F},\phi^{(r)})} & \Big(\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(B)), T^r\cdot\mathfrak{D}_I^{(B,\nu)}, (-1)^r, (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}\epsilon_0\cdot\varpi^I\Big) \\
\Big\uparrow {\scriptstyle ({u_*}^A,\eta^A)} & & \Big\uparrow {\scriptstyle ({u_*}^B,\eta^B)} \\
\Big(\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(A/\mathfrak{a})), \mathfrak{D}_J^{(A/\mathfrak{a},\tau/\mathfrak{a})}, 1, \varpi^J\Big) & \xrightarrow{(\overline{\mathrm{F}},\phi^{(0)})} & \Big(\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(B/\mathfrak{a})), \mathfrak{D}_J^{(B/\mathfrak{a},\nu/\mathfrak{a})}, 1, \epsilon_0\cdot\varpi^J\Big).
\end{array}$$

où

$$(\mathrm{F},\phi^{(r)}) = (\mathrm{F}_{(X,P,h')}, \phi^{(r)}_{(X,P,h')})$$

et

$$(\overline{\mathrm{F}},\phi^{(0)}) = (\mathrm{F}_{(Z,P_Z,h'_Z)}, \phi^{(0)}_{(Z,P_Z,h'_Z)})$$

sont les extensions évidentes du foncteur (F,ϕ) *de [Kn, II.3, p.82].*

Démonstration. Les foncteurs $({u_*}^A,\eta^A)$ et $({u_*}^B,\eta^B)$ ont déjà été définis dans la section A.3.1. Donnons maintenant par souci d'exhaustivité des définitions détaillées des foncteurs $(\mathrm{F},\phi^{(r)})$ et $(\overline{\mathrm{F}},\phi) = (\overline{\mathrm{F}},\phi^{(0)})$. Commençons par le foncteur $(\mathrm{F},\phi^{(r)})$. On a

$$\mathrm{F} : \mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(A)) \longrightarrow \mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(B))$$
$$M_\bullet \mapsto Q\otimes_A M_\bullet$$

(on rappelle que $Q = \mathrm{Hom}_A(P,A)$) et $\phi^{(r)}$ est une transformation de dualité pour F :

$$\phi^{(r)} : \mathrm{F}\ \cdot\ (T^r\cdot\mathfrak{D}_{I_\bullet}^{(A,\tau)}) \longrightarrow (T^r\cdot\mathfrak{D}_{I_\bullet}^{(B,\nu)})\ \cdot\ \mathrm{F},$$

qui étend la transformation de dualités ϕ de la proposition A.13. Soit $M_\bullet \in \mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(A))$. L'isomorphisme naturel

$$\phi^{(r)}_{M_\bullet} : Q \otimes_A \overline{\mathrm{Hom}_R(M_\bullet, I_\bullet)}\,[r] \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{Hom}_R(Q \otimes_A M_\bullet, I_\bullet)}\,[r]$$

est donc défini en degré i comme suit. Soit

$$q \otimes f_{-i-s} \in Q \otimes_A \overline{\mathrm{Hom}_R(M_{-i-s}, I_{-(s+r)})}.$$

On définit alors

$$Q \otimes_A \overline{\mathrm{Hom}_R(M_{-i-s}, I_{-(s+r)})} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{t=-r}^{n-r} \overline{\mathrm{Hom}_R(Q \otimes_A M_{-i-t}, I_{-(t+r)})}$$

par $q \otimes f_{-i-s} \mapsto \begin{cases} q' \otimes m \mapsto \mathrm{tr}_{B\,/\,R}(\widetilde{b'}(q,q'))\, f_{-i-s}(m) & \text{si } s = t \\ 0 & \text{si } s \neq t. \end{cases}$

De la même façon, on définit le foncteur $(\overline{\mathrm{F}}, \phi)$. On a

$$\overline{\mathrm{F}}\ : \mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(A\,/\mathfrak{a})) \longrightarrow \mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(B\,/\mathfrak{a}))$$

$$M_\bullet \mapsto Q\,/\mathfrak{a} \otimes_{A\,/\mathfrak{a}} M_\bullet$$

et ϕ est une transformation de dualités pour $\overline{\mathrm{F}}$:

$$\phi = \phi^{(0)} : \overline{\mathrm{F}}\ \cdot\ \mathfrak{D}^{(A\,/\mathfrak{a}, \tau/\mathfrak{a})}_{J_\bullet} \longrightarrow \mathfrak{D}^{(B\,/\mathfrak{a}, \nu/\mathfrak{a})}_{J_\bullet}\ \cdot\ \overline{\mathrm{F}}.$$

Soit $M_\bullet \in \mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(A))$. L'isomorphisme naturel

$$\phi^{(0)}_{M_\bullet} : Q\,/\mathfrak{a} \otimes_{A\,/\mathfrak{a}} \overline{\mathrm{Hom}_{R\,/\mathfrak{a}}(M_\bullet, J_\bullet)} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{Hom}_{R\,/\mathfrak{a}}(Q\,/\mathfrak{a} \otimes_{A\,/\mathfrak{a}} M_\bullet, J_\bullet)}$$

est donc défini en degré i comme suit. Soit

$$q \otimes f_{-i-s} \in Q\,/\mathfrak{a} \otimes_{A\,/\mathfrak{a}} \overline{\mathrm{Hom}_{R\,/\mathfrak{a}}(M_{-i-s}, J_{-s})}.$$

On définit alors

$$Q\,/\mathfrak{a} \otimes_{A\,/\mathfrak{a}} \overline{\mathrm{Hom}_{R\,/\mathfrak{a}}(M_{-i-s}, J_{-s})} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{t=0}^{n} \overline{\mathrm{Hom}_{R\,/\mathfrak{a}}(Q\,/\mathfrak{a} \otimes_{A\,/\mathfrak{a}} M_{-i-t}, J_{-t})}$$

par $q \otimes f_{-i-s} \mapsto \begin{cases} q' \otimes m \mapsto \mathrm{tr}_{B\,/\mathfrak{a}\,/\,R\,/\mathfrak{a}}(\widetilde{\overline{b}}'(q,q'))\, f_{-i-s}(m) & \text{si } s = t \\ 0 & \text{si } s \neq t. \end{cases}$

On obtient alors les deux foncteurs préservant les dualités $(\mathrm{F} \cdot {u_*}^A, \phi^{(r)}_{{u_*}^A} \cdot \mathrm{F}(\eta))$ et $({u_*}^B \cdot \overline{\mathrm{F}}, \eta^B_{\overline{\mathrm{F}}} \cdot {u_*}^B(\phi^{(0)}))$:

$$\Big(\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(A/\mathfrak{a})), \mathfrak{D}^{(A\,/\mathfrak{a}, \tau/\mathfrak{a})}_J, \varpi^J\Big) \longrightarrow \Big(\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(B)), T^r \cdot \mathfrak{D}^{(B,\nu)}_I, (-1)^r, (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} \varpi^I\Big)$$

Il s'agit de voir qu'ils sont isométriques dans le sens de [Gil6, Def. 1.2]. C'est-à-dire qu'il faut trouver un isomorphisme naturel de foncteurs

$$s : \ (\mathrm{F} \cdot {u_*}^A, \phi^{(r)}_{{u_*}^A} \cdot \mathrm{F}(\eta^A)) \xrightarrow{\simeq} ({u_*}^B \cdot \overline{\mathrm{F}}, \eta^B_{\overline{\mathrm{F}}} \cdot {u_*}^B(\phi^{(0)}))$$

qui est compatible avec le foncteur de translation T et qui satisfait à :

$$\phi^{(r)}_{u_*{}^A} \circ F(\eta^A) = (T^r \cdot \mathfrak{D}_I^{(B,\nu)})(s) \circ \eta^B_{\mathrm{F}} \circ u_*{}^B(\phi^{(0)}) \circ s_{\mathfrak{D}(A/\mathfrak{a},\tau/\mathfrak{a})}. \quad \text{(A.2)}$$

Soit donc s la flèche de tensorisation par $A/\mathfrak{a}$. Alors pour tout $M_\bullet \in \mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(A/\mathfrak{a}))$

$$s_{M_\bullet} : Q \otimes_A ({}_A M_\bullet) \xrightarrow{-\otimes_A A/\mathfrak{a}} {}_B(Q/\mathfrak{a} \otimes_{A/\mathfrak{a}} M_\bullet),$$

où ${}_A M_\bullet$ est le complexe $M_\bullet$ vu comme complexe de A-modules par la projection $A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$, et analoguement pour ${}_B(Q/\mathfrak{a} \otimes_{A/\mathfrak{a}} M_\bullet)$.

Vérifions d'abord la compatibilité de s avec le foncteur de translation. Soit donc $M_\bullet \in \mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(A/\mathfrak{a}))$. Il s'agit de vérifier que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
Q \otimes_A ({}_A M_\bullet)[1] \arrow[r, "T_{\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(B))} s_{M_\bullet}"] \arrow[d, equal] & {}_B(Q/\mathfrak{a} \otimes_{A/\mathfrak{a}} M_\bullet)[1] \arrow[d, equal] \\
Q \otimes_A ({}_A M_\bullet[1]) \arrow[r, "s_{T_{\mathrm{D}^b_c(\mathcal{M}(A/\mathfrak{a}))}(M_\bullet)}"'] & {}_B(Q/\mathfrak{a} \otimes_{A/\mathfrak{a}} M_\bullet[1]),
\end{tikzcd}$$

ce qui est le cas puisque les foncteurs ${}_B(Q/\mathfrak{a} \otimes_{A/\mathfrak{a}} \_)$ et $Q \otimes_A ({}_A\_)$ sont exacts, donc se calculent degré par degré.

Pour vérifier l'équation (A.2), il faut montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
{}_B(Q/\mathfrak{a} \otimes_{A/\mathfrak{a}} \overline{\mathrm{Hom}_{R/\mathfrak{a}}(M_\bullet, J_\bullet)}) \arrow[d, "u_*{}^B(\phi_{M_\bullet})"'] & Q \otimes_A ({}_A\overline{\mathrm{Hom}_{R/\mathfrak{a}}(M_\bullet, J_\bullet)}) \arrow[l, "s_{\mathfrak{D}(A/\mathfrak{a},\tau/\mathfrak{a})(M_\bullet)}"'] \arrow[d, "\mathrm{F}(\eta^A_{M_\bullet})"] \\
{}_B\overline{\mathrm{Hom}_{R/\mathfrak{a}}(Q/\mathfrak{a} \otimes_{A/\mathfrak{a}} M_\bullet, J_\bullet)} \arrow[d, "\eta^B_{\mathrm{F}(M_\bullet)}"'] & Q \otimes_A \overline{\mathrm{Hom}_R({}_A M_\bullet, I_\bullet)}[r] \arrow[d, "\phi^{(r)}_{u_*{}^A(M_\bullet)}"] \\
\overline{\mathrm{Hom}_R({}_B(Q/\mathfrak{a} \otimes_{A/\mathfrak{a}} M_\bullet), I_\bullet)}[r] \arrow[r, "(T^r \cdot \mathfrak{D}_I^{(B,\nu)})(s_{M_\bullet})"] & \overline{\mathrm{Hom}_R(Q \otimes_A ({}_A M_\bullet), I_\bullet)}[r]
\end{tikzcd}$$

Supposons alors que $q \otimes f_{-i-s}$ est un élement du complexe $Q \otimes_A ({}_A\overline{\mathrm{Hom}_{R/\mathfrak{a}}(M_\bullet, J_\bullet)})$ en degré i. L'image de cet élément par la composition

$$\phi^{(r)}_{u_*{}^A(M_\bullet)} \circ \mathrm{F}(\eta^A_{M_\bullet})$$

est l'homomorphisme

$$q' \otimes m \mapsto (-1)^{ri} \operatorname{tr}_{B/R}(\widetilde{b}'(q', q))\iota f_{-i-s}(m)$$

et l'image par la composition

$$(T^r \cdot \mathfrak{D}_I^{(B,\nu)})(s_{M_\bullet}) \circ \widetilde{\eta}^B_{\mathrm{F}(M_\bullet)} \circ u_*{}^B(\phi^{(0)}_{M_\bullet}) \circ s_{\mathfrak{D}(A/\mathfrak{a},\tau/\mathfrak{a})(M_\bullet)}$$

est l'homomorphisme

$$q' \otimes m \mapsto (-1)^{ri} \operatorname{tr}_{B/\mathfrak{a}\,/\,R/\mathfrak{a}}(\overline{\widetilde{b}}'(q', \overline{q}))\iota f_{-i-s}(m).$$

Mais $f_{-i-s}(m) \cdot \mathfrak{a} = 0$, comme $f_{-i-s}(m) \in J_{-s}$. Donc l'égalité des deux homomorphismes est une conséquence du fait que l'on a

$$\mathrm{tr}_{B\,/\,R}(\widetilde{b}'(q', q)) \otimes_R R\,/\mathfrak{a} = \mathrm{tr}_{B\,/\mathfrak{a}\,/\,R\,/\mathfrak{a}}(\overline{\widetilde{b}}'(q', \overline{q}))$$

et le théorème est prouvé. $\square$

Bibliographie

[AABGP] Bruce Allison, Saeid Azem, Stephen Berman, Yun Gao, Arturo Pianzola, *Extended affine Lie algebras and their root systems*, Mem. Am. Math. Soc. **603** (1997), 1-122

[ABFP] Bruce Allison, Stephen Berman, John Faulkner, Arturo Pianzola, *Realization of graded-simple algebras as loop algebras*, Forum Math. (2007), à paraître

[Ba1] Paul Balmer, *Triangular Witt groups. Part I : The 12-term localisation exact sequence*, K-theory **19** (2000), 311-363

[Ba2] Paul Balmer, *Triangular Witt groups. Part II : From usual to derived*, Math. Z. **236** (2001), 351-382

[BFP] Eva Bayer-Fluckiger, Raman Parimala, *Galois cohomology of the classical groups over fields of cohomological dimension* ≤ 2, Invent. math. **122** (1995), 195-229

[BH] Winfried Bruns, Jürgen. Herzog, *Cohen Macaulay Rings*, Cambridge Univ. Press, (1993)

[Bk] Anthony Bak, *On modules with quadratic forms* in *Algebraic K-theory and its Geometric applications*, Conf. Hull, Lecture Notes in Mathematics **108**, Springer Verlag, (1969), 55-66

[BP] Paul Balmer, Raman Preeti, *Shifted Witt groups of semi-local rings*, Manuscripta Math. **117** (2005), 1-27

[BKP] Hyman Bass, Aderemi O. Kuku, Claudio Pedrini *Proceedings of the Workshop and Symposium : Algebraic K-Theory and its Applications*, World Scientific, (1999)

[Bo] Armand Borel *A Linear Algebraic Groups*, second edition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer-Verlag, New York, (1991)

[Bs1] Hyman Bass, *On the ubiquity of Gorenstein rings*, Math. Z., **82**, (1963), 8-28

[Bs3] Hyman Bass, *Algebraic K-theory*, W.A.Benjamin, Inc. (1968)

[BT] Armand Borel, Jacques Tits, *Groupes réductifs*, Pub. Math. IHES **27**, (1965), 55-152

[BW] Paul Balmer, Charles Walter, *A Gersten-Witt Spectral Sequence For Regular Schemes*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série, t.35, (2002), 127-152

[CTGP] Jean-Louis Colliot Thélène, Philippe Gille, Raman Parimala, *Arithmetic of linear algebraic groups over two-dimensional geometric fields*, Duke Math. J., **121** (2004), 285-321

[dJ] Aise J. de Jong, *The period-index problem for the Brauer group of an algebraic surface*, Duke Mathematical Journal **123**, (2004), 71-94

[Ei] David Eisenbud, *Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag (1994)

[Fu] William Fulton, *Intersection Theory*, 2nd edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3.Folge, (1998)

[Ga] Ofer Gabber, *Some theorems on Azumaya algebras*, Lecture Notes in Mathematics, Band **844**, 129-209

[GP] Philippe Gille, Arturo Pianzola, *Isotriviality of torsors over Laurent polynomial rings*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **340** (2005), 725-729

[GP1] Philippe Gille, Arturo Pianzola, *Affine Kac-Moody Algebras and Galois Cohomology and forms over Laurent polynomial rings*, Math. Ann. **338** (2007), 497-543

[GP2] Philippe Gille, Arturo Pianzola, *Isotriviality and étale cohomology of Laurent polynomial rings*, J. Pure. Appl. Alg. **212** (2008) 780-800

[GP3] Philippe Gille, Arturo Pianzola, *Affine Kac-Moody Algebras and Galois Cohomology and forms over Laurent polynomial rings II*, à paraître

[GS] Philippe Gille, Tamás Szamuely, *Central Simple Algebras and Galois Cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 101, Cambridge University Press (2006)

[Gil1] Stefan Gille, *A Gersten-Witt Complex For Hermitian Witt Groups of Coherent Algebras Over Schemes I : Involutions Of The First Kind*, Compos. Math. **143** (2007), 271-289

[Gil2] Stefan Gille, *A Gersten-Witt Complex For Hermitian Witt Groups of Coherent Algebras Over Schemes I : Involutions Of The Second Kind*, Journal of K-Theory, à paraître

[Gil3] Stefan Gille, *On Witt groups with support*, Math. Ann. **322** (2002), 103-137

[Gil4] Stefan Gille, *A transfer morphism for Witt groups*, J. Reine Angew. Math. **564** (2003), 215-233

[Gil5] Stefan Gille, *A graded Gersten-Witt complex for schemes with a dualizing complex and the Chow group*, J. Pure Appl. Alg. **208** (2007), 391-419

[Gil6] Stefan Gille, *Homotopy invariance of coherent Witt groups*, Math. Z. **244** (2003), 211-233

[Gil7] Stefan Gille, *The general dévissage theorem for Witt groups of schemes*, Arch. Math. **88** (2007), 333-343

[Gir] Jean Giraud, *Cohomologie non abelienne*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179 Springer-Verlag, Berlin, (1971)

[Gr1] Alexander Grothendieck, *Le groupe de Brauer I*, Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, Amsterdam, Masson, Paris (1968), 46-66

[Gr2] Alexander Grothendieck, *Le groupe de Brauer II. Théories cohomologiques*, Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, Amsterdam, Masson, Paris (1968), 67-87

[Ha] Robin Hartshorne, *Residues and Duality*, Lecture Notes in Mathematics **20** Springer-Verlag (1966)

[KMRT] Max-Albert Knus, Alexander Merkurjev, Jean-Pierre Tignol, Markus Rost, *The Book of Involutions*, AMS Colloquium Publications Vol. 44 (1998)

[Kne] Martin Kneser, *On Galois Cohomology*, Lecture Notes, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1969)

[Kn] Max-Albert Knus, *Quadratic and Hermitian Forms over Rings*, Grundlehren der mathemtischen Wissenschaften **294**, Springer-Verlag, (1991)

[Kn1] Max-Albert Knus, *Algèbres d'Azumaya et modules projectifs*, Comm. Math. Helv. (1969)

[La] Tsit Yuen Lam, *Serre's Problem On Projective Modules*, Springer Mathematical Monographs (2006)

[Ma] Hideyuki Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge Studies 8, Cambridge University Press, (1986)

[Me] Alexander Merkurjev, *Invariants of algebraic groups*, J. Reine Angew. Math. **508** (1999), 127-156

[Mi] James S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton University Press, (1980)

[Mil] John Willard Milnor, *Introduction to Algebraic K-theory*, Princeton University Press, (1972)

[Ne] Erhard Neher, *Extended affine Lie algebras*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **26** (3) (2004), 90-96

[Pi] Arturo Pianzola, *Vanishing of H^1 for Dedekind rings and application to loop algebras*, Comptes Rendus, Acad, Sci. Paris, Ser. I **340** (2005), 633-638

[PS] Ivan A. Panin, Andrei A. Suslin, *On a Grothendieck Conjecture for Azumaya Algebras*, St. Petersburg Math. J., Vol. **9** (1998), No.4, 851-858

[Pa] Raman Parimala, *Quadratic Spaces Over Laurent Extensions of Dedekind Domains*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. **277**, No. 2, June (1983), 569-578

[QSS] Heinz-Georg Quebbemann, Winfried Scharlau, Manfred Schulte, *Quadratic and Hermitian forms in additive and abelian categories*, J. Algebra **59** (1979), 264-289

[Ro] Maxwell Rosenlicht, *Toroidal algebraic groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 984-988

[Sa] Jean-Jacques Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. Reine Angew. Math. **327** (1981), 12-80

[Sch] Winfried Scharlau, *Quadratic and Hermitian Forms*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **270**, Springer-Verlag (1985)

[SGA3] *Séminaire de géométrie algébrique de l'I.H.E.S., 1963-1964, schémas en groupes, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck*, Lecture Notes in Math. **151-153**, Springer-Verlag (1970)

[Se] Jean-Pierre Serre, *Cohomologie Galoisienne*, Cinquième édition, Springer-Verlag (1997)

[Ti] Jacques Tits, *Classification of Algebraic Semisimple Groups*, Algebraic Groups and Discontinous Subgroups (Boulder, Colorado 1965), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics IX, American Math. Soc¿ Providence (1966), 33-62

[We] André Weil, *Algebras with involution and the classical groups*, J. Ind. Math. Soc. **24** (1961), 589-623

Wilhelm Alexander Steinmetz-Zikesch
Laboratoire de Mathématiques
Bâtiment 425
Université Paris-Sud XI
91405 Orsay
France
alexander.steinmetz@gmail.fr