

ISOTROPIE D'UNE FORME BILINÉAIRE D'ALBERT SUR LE CORPS DE FONCTIONS D'UNE QUADRIQUE EN CARACTÉRISTIQUE 2

AHMED LAGHRIBI

ABSTRACT. In this paper we give a complete answer to the isotropy of an Albert bilinear form over the function field of a quadric in characteristic 2. As a consequence, we complete the classification of nongood bilinear forms of height and degree 2 given in [10].

1. INTRODUCTION

Fixons F un corps commutatif de caractéristique 2. À une F -forme bilinéaire B d'espace sous-jacent V , on associe la F -forme quadratique diagonale \tilde{B} définie sur V par: $\tilde{B}(v) = B(v, v)$ pour tout $v \in V$. On note $F(B)$ le corps de fonctions de la quadrique affine d'équation $\tilde{B} = 0$, qu'on appelle le corps de fonctions de B . On désigne par $\dim B$ la dimension de B . Une forme bilinéaire d'Albert est une forme de dimension 6 et de déterminant trivial.

Le but de cet article est d'étudier l'isotropie d'une forme bilinéaire d'Albert sur le corps de fonctions d'une quadrique. Cela dépend du degré normique de la forme quadratique diagonale associée à la forme bilinéaire d'Albert en question (on renvoie à la section 2 pour des rappels sur le degré normique). Plus précisément, si γ est une F -forme bilinéaire d'Albert anisotrope, alors le degré normique de $\tilde{\gamma}$, qu'on note $\text{ndeg}_F(\tilde{\gamma})$, prend la valeur 8 ou 16 du fait que γ est anisotrope. Si $\text{ndeg}_F(\tilde{\gamma}) = 8$, alors il existe une 3-forme bilinéaire de Pfister ρ telle que $\tilde{\gamma}$ soit semblable à une sous-forme de $\tilde{\rho}$. Dans ce cas, en combinant [2, Prop. 8.9(iii)] et [7, Prop. 2.4], on obtient que $\gamma_{F(B)}$ est isotrope si et seulement si \tilde{B} est semblable à une sous-forme de $\tilde{\rho}$. Lorsque $\text{ndeg}_F(\tilde{\gamma}) = 16$, notre but est de prouver le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soit γ une F -forme bilinéaire d'Albert anisotrope telle que $\text{ndeg}_F(\tilde{\gamma}) = 16$. Soit B une F -forme bilinéaire anisotrope de dimension ≥ 2 .*

2000 MSC. 11E04, 11E81.

Mots clés. Forme bilinéaire (quadratique), corps de fonctions d'une quadrique, degré normique.

(1) Supposons que \tilde{B} ne soit pas semblable à une quasi-forme de Pfister de dimension 4. Alors, $\gamma_{F(B)}$ est isotrope si et seulement si \tilde{B} est semblable à une sous-forme de $\tilde{\gamma}$.

(2) Supposons que \tilde{B} soit semblable à une quasi-forme de Pfister de dimension 4. Soit C une sous-forme de B de dimension 3. Alors, $\gamma_{F(B)}$ est isotrope si et seulement si \tilde{C} est semblable à une sous-forme de $\tilde{\gamma}$.

Ce théorème donne une réponse positive à [10, Question 1.4]. Comme un corollaire, il permet d’avoir le théorème suivant qui constitue une classification complète des formes bilinéaires anisotropes, non bonnes, de hauteur et de degré 2 (on renvoie à la section 2 pour la définition de la hauteur et du degré d’une forme bilinéaire).

Théorème 1.2. *Soit B une F -forme bilinéaire anisotrope. Alors, B est de hauteur et de degré 2, mais pas bonne si et seulement si l’une des deux conditions suivantes est vérifiée:*

(1) B est une forme d’Albert.

(2) $\dim B = 8$, et il existe une forme bilinéaire d’Albert anisotrope C , une 3-forme bilinéaire de Pfister π , et des scalaires $x, y \in F^*$ tels que $xB \perp yC \perp \pi$ soit métabolique, et que les formes \tilde{B} et \tilde{C} soient semblables à des sous-formes de $\tilde{\pi}$.

Dans [10], la classification des formes bilinéaires anisotropes de dimension 8, non bonnes de hauteur et de degré 2, était incomplète; puisqu’elle dépendait de l’étude de l’isotropie d’une forme bilinéaire d’Albert sur le corps des fonctions d’une quadrique. Plus précisément, le théorème 1.2 a été prouvé dans [10, Prop. 1.6] sous l’hypothèse que le théorème 1.1 soit vrai.

Le reste de cet article est organisé comme suit. Après avoir donné des rappels dans la section 2, on établira dans la section 3 quelques résultats préliminaires. La section 4 sera consacrée à la preuve du théorème 1.1. On va s’inspirer de l’étude de l’isotropie d’une forme quadratique d’Albert faite par Leep en caractéristique $\neq 2$ [12, Ch. XIII, Th. 2.13, pp. 489-490]. Mais dans notre cas, en raison de la caractéristique 2, l’étude est beaucoup plus subtile. En plus de quelques résultats sur les formes bilinéaires, comme le théorème de norme de Knebusch [4, Th. 4.2], on se servira de la notion de degré normique, et d’un résultat de spécialisation pour les formes quadratiques totalement singulières (Corollaire 3.2). Ce dernier résultat permettra d’utiliser le théorème de norme pour les formes quadratiques totalement singulières [8, Th. 1.1], ce qui simplifiera la preuve du théorème 1.1 lorsque $\dim B \geq 5$.

2. QUELQUES RAPPELS

– Pour $a_1, \dots, a_n \in F^* := F - \{0\}$, on désigne par $\langle a_1, \dots, a_n \rangle_b$ la forme bilinéaire donnée par le polynôme $\sum_{i=1}^n a_i x_i y_i$.

– Une forme quadratique φ est dite totalement singulière si elle est donnée par un polynôme de type $\sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ pour $a_1, \dots, a_n \in F$. Dans ce cas, on note $\varphi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

– Deux formes bilinéaires (ou quadratiques) B et C sont dites semblables si $B \simeq \alpha C$ pour un certain $\alpha \in F^*$. On dira qu'une forme bilinéaire (ou quadratique) B est une sous-forme d'une autre forme C s'il existe une forme B' telle que $C \simeq B \perp B'$.

– Une forme bilinéaire (ou quadratique) B d'espace sous-jacent V est dite isotrope si $\tilde{B}(v) = 0$ (ou $B(v) = 0$) pour un certain $v \in V$ non nul, sinon la forme B est dite anisotrope.

– Une forme bilinéaire est dite métabolique si elle est isométrique à une somme orthogonale de formes bilinéaires isotropes de dimension 2.

– Toute forme bilinéaire B se décompose comme suit: $B \simeq B_{an} \perp M$, où M est une forme métabolique et B_{an} est une forme bilinéaire anisotrope, unique à isométrie près [3], [13]. En général, la forme M n'est pas unique. De même, une forme quadratique totalement singulière φ se décompose comme suit: $\varphi \simeq \varphi_{an} \perp r \times \langle 0 \rangle$ avec φ_{an} une forme anisotrope unique [2, Prop. 2.4]. On note $i_d(\varphi)$ l'entier r .

– Pour deux formes bilinéaires B et C , on note $B \sim C$ lorsque $B_{an} \simeq C_{an}$. En particulier, $B \sim 0$ signifie que B est métabolique.

– Une forme quadratique totalement singulière φ est dite une quasi-forme de Pfister s'il existe une forme bilinéaire de Pfister B telle que $\varphi \simeq \tilde{B}$, et elle est dite une quasi-voisine de Pfister si elle est semblable à une sous-forme d'une quasi-forme de Pfister φ' et $2 \dim \varphi > \dim \varphi'$. Dans ce cas, la forme φ' est unique.

– Le corps normique d'une forme quadratique totalement singulière non nulle φ , qu'on note $N_F(\varphi)$, est le corps $F^2(\alpha\beta \mid \alpha, \beta \in D_F(\varphi))$, où $D_F(\varphi)$ est l'ensemble des scalaires de F^* représentés par φ . Le degré normique de φ est l'entier $[N_F(\varphi) : F^2]$, on le note $\text{ndeg}_F(\varphi)$. Il est bien clair que $N_F(\varphi) = N_F(\alpha\varphi)$ pour tout scalaire $\alpha \in F^*$. Si φ est anisotrope et $2^n < \dim \varphi \leq 2^{n+1}$, alors $\text{ndeg}_F(\varphi) \geq 2^{n+1}$, et $\text{ndeg}_F(\varphi) = 2^{n+1}$ si et seulement si φ est une quasi-voisine de Pfister. On renvoie à [2, Section 8] pour plus de détails sur le degré normique.

– À une F -forme bilinéaire non nulle B , on associe une suite de corps et de formes bilinéaires $(B_i, F_i)_{i \geq 0}$ comme suit: $F_0 = F$ et $B_0 = B_{an}$, et pour $i \geq 1$, on prend $F_i = F_{i-1}(B_{i-1})$ et $B_i = ((B_{i-1})_{F_i})_{an}$. La hauteur de B est le plus petit entier h tel que $\dim B_h \leq 1$. Lorsque $\dim B_0 \geq 2$, alors $h \geq 1$ et la forme B_{h-1} est de hauteur 1. D'après [9, Th. 4.1], il existe

une unique F_{h-1} -forme bilinéaire de Pfister $\pi = \langle 1 \rangle_b \perp \pi'$ telle que B_{h-1} soit semblable à π ou π' suivant que $\dim B$ est paire ou impaire. Si $\dim B$ est paire, alors on dira que B est de degré d où $\dim \pi = 2^d$, sinon, on dira que B est de degré 0. La forme B est dite bonne s'il existe une F -forme bilinéaire C telle que $\pi \simeq C_{F_{h-1}}$. On renvoie à [9, 11] pour plus de détails sur le déploiement des formes bilinéaires en caractéristique 2, et pour des résultats sur les formes bilinéaires de hauteur 2.

3. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Soient A un anneau commutatif, M un A -module libre de rang fini n , et Q une A -forme quadratique sur M . On dira que Q est diagonale s'il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $Q \simeq \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Pour $\varphi : A \rightarrow A'$ un homomorphisme d'anneaux, on note $Q_{A'}$ la A' -forme quadratique sur $M \otimes_A A'$ induite par Q .

L'assertion (1) de la proposition suivante se met en parallèle avec un résultat de spécialisation dû à Knebusch [4, Prop. 3.4].

Proposition 3.1. *Soient K un corps de caractéristique 2 muni d'une valuation discrète, A l'anneau de la valuation, π une uniformisante, et U le groupe des unités de A . On note k le corps résiduel. Soient M un A -module libre de rang m , et γ une A -forme quadratique sur M diagonale. Soient $u_1, \dots, u_n \in U$ tels que:*

- Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $v_i \in M$ vérifiant $\gamma(v_i) = \pi u_i$.
- La forme $\langle \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n \rangle$ soit anisotrope sur k , où $\bar{u}_i = u_i + \pi A$.

Alors, on a:

- (1) $i_d(\gamma_k) \geq n$.
- (2) $\langle \pi u_1, \dots, \pi u_n \rangle$ est une sous-forme de γ .

Preuve. On garde les mêmes notations et hypothèses que dans la proposition.

On affirme que le A -module $N := \sum_{i=1}^n Av_i$ est complété dans M , i.e., il existe un A -sous-module N' de M tel que $M = N \oplus N'$. Ceci revient à montrer que le A -module quotient M/N est sans torsion. En effet, soient $m \in M$ et $\alpha \in A - \{0\}$ tels que $\alpha m \in N$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ tels que $\alpha m = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Sans perdre de généralités, on peut supposer que $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont premiers entre eux. Comme $\gamma(\alpha m) = \alpha^2 \gamma(m) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \pi u_i$, et que la forme $\langle \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n \rangle$ est anisotrope, on a alors nécessairement que $\alpha \in U$, ce qui implique que $m \in N$.

Maintenant, considérons la forme quadratique $\varphi := \frac{1}{\pi} \gamma : N \rightarrow A$, et soit $\bar{v}_i = v_i + \pi N$ pour $i = 1, \dots, n$. Soit $\bar{\varphi} : N/\pi N \rightarrow k$ la forme quadratique induite par φ . Puisque $\langle \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n \rangle$ est anisotrope, on déduit

que les scalaires $\overline{\varphi}(\overline{v}_i) = \overline{u}_i$ sont k^2 -linéairement indépendants. Ainsi, les vecteurs \overline{v}_i sont k -linéairement indépendants dans $N/\pi N$, car la forme $\overline{\varphi}$ est diagonale et donc quasi-linéaire. Comme N est complété dans M , on conclut que les vecteurs $v_i + \pi M$ sont k -linéairement indépendants dans $M/\pi M$. D'une part, ceci permet d'avoir l'assertion (1) car γ_k est quasi-linéaire et $\gamma_k(v_i + \pi M) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. D'autre part, on déduit que les v_i sont A -linéairement indépendants dans M . Comme N est complété dans M , l'assertion (2) s'en déduit. ■

De la proposition 3.1, on obtient les deux corollaires suivants.

Corollaire 3.2. *Soit $R = F[t_1, \dots, t_n]$ l'anneau des polynômes sur F en les variables t_1, \dots, t_n . Soient γ une F -forme quadratique totalement singulière, et $p \in R$ un polynôme irréductible. On note K et F_p les corps des fractions de R et $R/(p)$, respectivement. Soient $u_1, \dots, u_n \in R$ non divisibles par p tels que la K -forme quadratique γ_K représente pu_1, \dots, pu_n , et que $\langle \overline{u}_1, \dots, \overline{u}_n \rangle$ soit anisotrope, où $\overline{u}_i = u_i + (p)$. Alors, $i_d(\gamma_{F_p}) \geq n$.*

Preuve. Soit V le F -espace vectoriel sous-jacent à γ . Soit A l'anneau de la valuation p -adique v de K . Le corps résiduel de v est isomorphe à F_p . Puisque pu_1, \dots, pu_n sont représentés par la forme quadratique γ_K , on déduit, par [1, Cor. 3.4], que $pu_i = \gamma_R(v_i)$ pour certains $v_i \in V \otimes_F R$, $1 \leq i \leq n$. En particulier, $pu_i = \gamma_A(v_i)$, $1 \leq i \leq n$. Par la proposition 3.1, on déduit que $i_d(\gamma_{F_p}) \geq n$. ■

Corollaire 3.3. *On garde les mêmes notations et hypothèses que dans le corollaire 3.2. Si, de plus, p est unitaire et $n \geq \lceil \frac{\dim \gamma}{2} \rceil$, alors p est une norme de γ_K , i.e., $\gamma_K \simeq p\gamma_K$.*

Preuve. Par le corollaire 3.2, et l'hypothèse $n \geq \lceil \frac{\dim \gamma}{2} \rceil$, la forme γ est quasi-hyperbolique sur F_p . Puisque p est unitaire, on obtient que $\gamma_K \simeq p\gamma_K$ [8, Th. 1.1]. ■

On rappelle un résultat de substitution.

Proposition 3.4. ([8, Cor. 2.4]) *Soit φ une F -forme quadratique totalement singulière anisotrope qui représente un polynôme $p \in F[t_1, \dots, t_n]$. Si $c = (c_1, \dots, c_n) \in F^n$ vérifie $p(c) \neq 0$, alors $p(c) \in D_F(\varphi)$.*

Corollaire 3.5. *Soit $F(t)$ le corps des fractions rationnelles en la variable t . Soient φ et $\psi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ des F -formes quadratiques totalement singulières anisotropes telles que $b \langle a_1 t^2 + a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$ soit une sous-forme de $\varphi_{F(t)}$ pour un certain $b \in F^*$ ($n \geq 2$). Alors, $b \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$ est une sous-forme de φ .*

Preuve. On a $a_1 + a_2 \neq 0$ car $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ est anisotrope. Puisque $b(a_1 t^2 + a_2) \in D_{F(t)}(\varphi)$, on déduit par la proposition 3.4 que $ba_2 \in D_F(\varphi)$ et $b(a_1 +$

$a_2) \in D_F(\varphi)$. Ainsi, $ba_1, ba_2 \in D_F(\varphi)$ car $D_F(\varphi) \cup \{0\}$ est un F^2 -espace vectoriel. Comme ba_3, \dots, ba_n appartiennent aussi à $D_F(\varphi)$, on déduit donc, que $b \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ est une sous-forme de φ . ■

La proposition suivante concerne la réduction du degré normique après passage à une extension de F . Elle a été déjà prouvée pour une extension donnée par le corps de fonctions d'une quadrique [2, Section 8].

Proposition 3.6. *Soient $p \in F[t_1, \dots, t_n]$ irréductible et φ une F -forme quadratique totalement singulière. Soit F_p le corps des fractions de $F[t_1, \dots, t_n]/(p)$. Si $\text{ndeg}_{F_p}(\varphi_{F_p}) < \text{ndeg}_F(\varphi)$, alors p est inséparable et $\text{ndeg}_{F_p}(\varphi_{F_p}) = \frac{1}{2} \text{ndeg}_F(\varphi)$. (p inséparable signifie que $\partial p / \partial t_i = 0$ pour tout i .)*

Preuve. Avec les mêmes notations que dans la proposition, l'extension F_p/F est donnée par une extension transcendante pure suivie d'une extension séparable si et seulement si $p \notin F[t_1^2, \dots, t_n^2]$ (i.e., p est séparable); auquel cas, des éléments 2-indépendants sur F restent 2-indépendants sur F_p , ce qui montre que le degré normique ne change pas. Si $p \in F[t_1^2, \dots, t_n^2]$, alors $F_p = E(\alpha)$ avec E/F séparable et $\alpha^{2^m} \in E$ pour un certain entier $m \geq 1$. Comme pour tous $c_1, \dots, c_r \in F$, on a $[F^2(c_1, \dots, c_r) : F^2] = [E^2(c_1, \dots, c_r) : E^2] = \delta [F_p^2(c_1, \dots, c_r) : F_p^2]$ avec $\delta = 1$ ou 2 , on déduit que le degré normique ne peut se réduire que de moitié après extension à F_p . ■

Le lemme suivant permet de relever une isométrie entre deux formes quadratiques totalement singulières en une isométrie entre deux formes bilinéaires qui leur sont associées.

Lemme 3.7. *Soient B une F -forme bilinéaire et $C = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ une F -forme quadratique anisotrope. Alors, on a équivalence entre:*

- (1) C est une sous-forme de \tilde{B} .
- (2) La forme bilinéaire $\langle b_1, \dots, b_n \rangle_b$ est une sous-forme de B , où pour tout $1 \leq i \leq n$, $b_i = a_i + \sum_{k=1}^{i-1} x_{i,k}^2 a_k$ pour certains $x_{i,1}, \dots, x_{i,i-1} \in F$ (lire $b_1 = a_1$).

Preuve. (2) \implies (1) On utilise l'isométrie $\langle a, b \rangle \simeq \langle a, a + b \rangle$ pour tous $a, b \in F$.

(1) \implies (2) Soit V l'espace sous-jacent à B . Puisque $D_F(C) \subset D_F(B)$, il existe $v_i \in V$ tel que $B(v_i) = a_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Puisque C est anisotrope, les scalaires a_1, \dots, a_n sont F^2 -linéairement indépendants, ce qui implique que les vecteurs v_1, \dots, v_n sont F -linéairement indépendants. On complète ces vecteurs en une base $\{v_1, \dots, v_{\dim B}\}$ de V . Maintenant, en appliquant le procédé de Gram-Schmidt aux vecteurs v_1, v_2, \dots relativement à B , on obtient la conclusion désirée. ■

4. PREUVE DU THÉORÈME 1.1.

Soit γ une F -forme bilinéaire d'Albert anisotrope telle que $\text{ndeg}_F(\tilde{\gamma}) = 16$. Soit B une F -forme bilinéaire anisotrope de dimension $n \geq 2$. Posons $B = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$.

4.1. Supposons que \tilde{B} ne soit pas semblable à une quasi-forme de Pfister de dimension 4. Si \tilde{B} est semblable à une sous-forme de $\tilde{\gamma}$, il est clair alors que $\gamma_{F(B)}$ est isotrope. Réciproquement, supposons que $\gamma_{F(B)}$ soit isotrope. On va montrer que \tilde{B} est semblable à une sous-forme de $\tilde{\gamma}$. On suppose $n \geq 4$ car le théorème a été prouvé dans [10, Prop. 1.5] lorsque $n \leq 3$.

(A) Supposons qu'on ait $n = 4$. On sait que le corps $F(B)$ est isomorphe à $F(t)(\langle a_1t^2 + a_2, a_3, \dots, a_n \rangle_b)$. D'après [10, Prop. 1.5], l'isotropie de $\gamma_{F(t)}$ sur $F(t)(\langle a_1t^2 + a_2, a_3, a_4 \rangle_b)$ implique l'isométrie suivante:

$$\text{(Iso 1)} \quad \tilde{\gamma}_{F(t)} \simeq f \langle a_1t^2 + a_2, a_3, a_4 \rangle \perp \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$$

pour $f, f_1, f_2, f_3 \in F[t]$ convenables sans facteurs carrés. Notre but est de se ramener à une isométrie avec un polynôme f de degré 0. Ce qui impliquera, par le corollaire 3.5, que \tilde{B} est semblable à une sous-forme de $\tilde{\gamma}$.

Supposons que $\deg(f) > 0$. Soient $p \in F[t]$ un facteur irréductible unitaire de f , et $g = \frac{f}{p}$.

On a $\text{ndeg}_F(\tilde{B}) = 8$ puisque \tilde{B} n'est pas une quasi-voisine de Pfister. Comme $N_F(\tilde{B}) = F^2(a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4)$, la proposition 3.6 implique donc, que l'une au moins des trois formes quadratiques $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\langle a_1, a_2, a_4 \rangle$ et $\langle a_1, a_3, a_4 \rangle$ reste anisotrope sur F_p .

(a) *Supposons que $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ reste anisotrope sur F_p .* La même preuve qu'on va donner s'appliquera aussi pour la forme $\langle a_1, a_2, a_4 \rangle$ puisque les scalaires a_3 et a_4 jouent un rôle symétrique dans (Iso 1). Le lemme 3.7 et l'isométrie (Iso 1) impliquent:

$$\text{(Iso 2)} \quad \gamma_{F(t)} \simeq f \langle a_3, g_1^2(a_1t^2 + a_2) + g_2^2a_3, r_1 \rangle_b \perp \langle r_2, r_3, r_4 \rangle_b$$

avec $r_1 = h_1^2a_3 + h_2^2(a_1t^2 + a_2) + h_3^2a_4$ et $g_1, g_2, r_2, r_3, r_4, h_j \in F[t]$. On peut supposer que g_1, g_2 sont premiers entre eux, et que r_2, r_3, r_4 sont sans facteurs carrés.

Le polynôme p ne divise pas $g_1^2(a_1t^2 + a_2) + g_2^2a_3$ car la forme $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ est anisotrope sur F_p , et que g_1 et g_2 sont premiers entre eux. On note $\partial^1 : W(F(t)) \rightarrow W(F_p)$ le premier homomorphisme résiduel pour la

valuation p -adique de $F(t)$. Posons $r_1 = p^\epsilon s$ avec $\epsilon \in \mathbb{N}$ et $s \in F[t]$ non divisible par p . On discute sur la parité de ϵ .

(i) Supposons que ϵ soit pair. Puisque $\det \gamma = 1$, on est ainsi dans l'un des deux cas suivants:

(i.1) Cas où p divise un seul polynôme parmi r_2, r_3, r_4 , disons r_2 . Dans ce cas, on obtient $\gamma_{F_p} \sim \partial^1(\gamma_{F(t)}) \sim \langle \overline{r_3}, \overline{r_4} \rangle_b$. Puisque le déterminant de γ est trivial, on déduit que $\gamma_{F_p} \sim 0$. Ainsi, p est une norme de $\gamma_{F(t)}$ [4, Th. 4.2].

(i.2) Cas où p divise les trois polynômes r_2, r_3, r_4 . Comme dans le cas (i.1), on obtient que $\gamma_{F_p} \sim 0$, et donc p est une norme de $\gamma_{F(t)}$.

(ii) Supposons que ϵ soit impair. Toujours en raison de la trivialité du déterminant de γ , on est dans l'un des deux cas suivants:

(ii.1) Cas où p divise deux polynômes parmi r_2, r_3, r_4 , disons r_2 et r_3 . Dans ce cas, on obtient $\gamma_{F_p} \sim \partial^1(\gamma_{F(t)}) \sim \langle \overline{g_s}, \overline{r_4} \rangle_b$. Comme dans le cas (i.1), on déduit que p est une norme de $\gamma_{F(t)}$.

(ii.2) Cas où p ne divise pas les polynômes r_2, r_3, r_4 . Dans ce cas, on obtient

$$\gamma_{F_p} \sim \partial^1(\gamma_{F(t)}) \sim \langle \overline{g_s}, \overline{r_2}, \overline{r_3}, \overline{r_4} \rangle_b.$$

La forme $D := \langle \overline{g_s}, \overline{r_2}, \overline{r_3}, \overline{r_4} \rangle_b$ est de déterminant trivial.

– Si D est isotrope, alors elle est métabolique, ce qui implique que $\gamma_{F_p} \sim 0$. Ainsi, p est une norme de $\gamma_{F(t)}$.

– Si D est anisotrope, alors on affirme que $N_{F_p}(\gamma_{F_p}) \subset D_{F_p}(\tilde{D}) \cup \{0\}$.

Pour le prouver, il suffit de vérifier que $D_F(\gamma) \subset D_{F_p}(\tilde{D})$. Soit $a \in D_F(\gamma)$. Par l'isométrie (Iso 2), on a:

$$(1) \quad aH^2 = f(a_1F_1^2 + a_2F_2^2 + a_3F_3^2) + gsG_1^2 + \sum_{i=2}^4 r_iG_i^2$$

pour $H, F_i, G_j \in F[t]$ convenables, qu'on suppose premiers entre eux. En passant modulo p dans la dernière relation, on obtient:

$$(2) \quad a\overline{H}^2 = \overline{gs}\overline{G}_1^2 + \sum_{i=2}^4 \overline{r}_i\overline{G}_i^2.$$

Si p divise H , alors p divisera les polynômes G_1, G_2, G_3, G_4 du fait que D est anisotrope. Ainsi, par la relation (1), p^2 divisera $f(a_1F_1^2 + a_2F_2^2 + a_3F_3^2)$, et donc p divisera $g(a_1F_1^2 + a_2F_2^2 + a_3F_3^2)$. Comme $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ est anisotrope sur F_p , alors on obtiendra que F_1, F_2, F_3 sont divisibles par p ,

une contradiction avec l'hypothèse que les polynômes H, F_i, G_j sont premiers entre eux. Ainsi, p ne divise pas H . Par conséquent, par la relation (2), $a \in D_{F_p}(\tilde{D})$.

Donc, $\text{ndeg}_{F_p}(\tilde{\gamma}) \leq \text{ndeg}_{F_p}(\tilde{D}) = 4$. Mais ceci est impossible par la proposition 3.6 car $\text{ndeg}_F(\tilde{\gamma}) = 16$.

Par conséquent, dans tous les cas, p est une norme de $\gamma_{F(t)}$. Ceci implique par l'isométrie (Iso 2):

$$\gamma_{F(t)} \simeq g \langle a_3, g_1^2(a_1t^2 + a_2) + g_2^2a_3, r_1 \rangle_b \perp \langle pr_2, pr_3, pr_4 \rangle_b.$$

En reprenant la forme quadratique $\tilde{\gamma}_{F(t)}$, on obtient:

$$\text{(Iso 3)} \quad \tilde{\gamma}_{F(t)} \simeq g \langle a_1t^2 + a_2, a_3, a_4 \rangle \perp \langle pr_2, pr_3, pr_4 \rangle.$$

(b) *Supposons que $\langle a_1, a_3, a_4 \rangle$ soit anisotrope.* Alors, l'isométrie (Iso 1) et le lemme 3.7 impliquent:

$$\gamma_{F(t)} \simeq f \langle a_3, l_1^2a_3 + l_2^2a_4, s_1 \rangle_b \perp \langle s_2, s_3, s_4 \rangle_b,$$

où $s_1 = m_1^2a_3 + m_2^2a_4 + m_3^2(a_1t^2 + a_2)$ pour certains $l_i, m_j \in F[t]$. On peut supposer que l_1 et l_2 sont premiers entre eux. Ainsi, le polynôme p ne divise pas $l_1^2a_3 + l_2^2a_4$ puisque $\langle a_1, a_3, a_4 \rangle$ est anisotrope sur F_p . On reprend alors le même argument que dans le cas (a) en remplaçant les r_i par les s_i , et le polynôme $g_1^2(a_1t^2 + a_2) + g_2^2a_3$ par $l_1^2a_3 + l_2^2a_4$. On obtient alors:

$$\text{(Iso 4)} \quad \tilde{\gamma}_{F(t)} \simeq g \langle a_1t^2 + a_2, a_3, a_4 \rangle_b \perp \langle ps_2, ps_3, ps_4 \rangle_b.$$

Maintenant, qu'on a (Iso 3) ou (Iso 4), et si $\deg(g) > 0$, on prend un facteur irréductible unitaire q de g , et on reprend pour g et q l'argument qu'on vient de faire pour f et p . Ainsi de suite, en continuant le procédé, on peut supposer dans l'isométrie (Iso 1) que le polynôme f est de degré 0.

(B) Supposons qu'on ait $n = 5$. On a $\text{ndeg}_F(\tilde{B}) \geq 8$ car $\dim B > 4$. On vérifie sans difficultés que $\text{ndeg}_{F(t)}(\langle a_1t^2 + a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle) = 8$. Par conséquent, $\langle a_1t^2 + a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle$ n'est pas une quasi-voisine de Pfister. Par le cas (A), l'isotropie de $\gamma_{F(t)}$ sur $F(t)(\langle a_1t^2 + a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle_b)$ implique l'isométrie suivante

$$\tilde{\gamma}_{F(t)} \simeq f \langle a_1t^2 + a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle \perp C,$$

pour $f \in F[t]$ sans facteur carré, et C une $F(t)$ -forme quadratique de dimension 2.

(i) Si $\deg(f) = 0$, alors on déduit, par le corollaire 1.2, que \tilde{B} est semblable à une sous-forme de $\tilde{\gamma}$.

(ii) Supposons $\deg(f) > 0$. Soit p un facteur irréductible unitaire de f . Puisque $\text{ndeg}_{F_p}(\langle \overline{a_1 t^2 + a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \overline{a_5} \rangle) \in \{4, 8\}$, il existe trois éléments b_1, b_2, b_3 parmi a_3, a_4, a_5 et $a_1 t^2 + a_2$ tels que la forme $\langle \overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3} \rangle$ soit anisotrope sur F_p . Comme $f \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ est une sous-forme de $\tilde{\gamma}$ de dimension $3 \geq \frac{\dim \gamma}{2}$, on obtient, par le corollaire 3.3, que p est une norme de $\tilde{\gamma}$. Ceci est vrai pour tout facteur irréductible unitaire de f . Par conséquent, il existe $a \in F^*$ tel que $a \langle a_1 t^2 + a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$ soit une sous-forme de $\tilde{\gamma}$. Par le corollaire 3.5, \tilde{B} est semblable à une sous-forme de $\tilde{\gamma}$.

(C) Supposons qu'on ait $n = 6$. Par le cas (B), l'isotropie de $\gamma_{F(t)}$ sur $F(t)(\langle a_1 t^2 + a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \rangle_b)$ implique que $h \langle a_1 t^2 + a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \rangle$ est une sous-forme de $\tilde{\gamma}_{F(t)}$ pour un certain $h \in F[t]$ sans facteurs carrés. On a $\text{ndeg}_{F(t)}(\langle a_1 t^2 + a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \rangle) \geq 8$. Ainsi, $\text{ndeg}_{F_p}(\langle \overline{a_1 t^2 + a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \overline{a_5}, \overline{a_6} \rangle) \geq 4$. Ainsi, il existe trois éléments c_1, c_2, c_3 parmi a_3, a_4, a_5, a_6 et $a_1 t^2 + a_2$ tels que la forme $\langle \overline{c_1}, \overline{c_2}, \overline{c_3} \rangle$ soit anisotrope sur F_p . On finit la preuve comme dans le cas (B)-(ii).

(D) Supposons qu'on ait $n > 6$. Soit $C = \langle b_1, \dots, b_7 \rangle$ une sous-forme de B de dimension 7. Par [1, Cor. 7.20], γ est isotrope sur $F(C)$. En particulier, $\gamma_{F(t)}$ est isotrope sur $F(t)(\langle b_1 t^2 + b_2, b_3, \dots, b_7 \rangle_b)$. Par le cas (C), $k \langle b_1 t^2 + b_2, b_3, \dots, b_7 \rangle$ est une sous-forme de $\gamma_{F(t)}$ pour un certain $k \in F[t]$ sans facteurs carrés. On a $\text{ndeg}_{F(t)}(\langle b_1 t^2 + b_2, b_3, \dots, b_7 \rangle) \geq 8$. Le même procédé que dans les cas (B)-(ii) et (C) montre qu'on peut supposer k de degré 0, et par conséquent $\langle b_1, \dots, b_7 \rangle$ est semblable à une sous-forme de γ , ce qui n'est pas possible en raison de la dimension.

4.2. Supposons que \tilde{B} soit semblable à une quasi-forme de Pfister de dimension 4. Soit C une sous-forme de B de dimension 3. Alors, \tilde{C} et \tilde{B} sont des quasi-voisins d'une même quasi-forme de Pfister. Par conséquent, $B_{F(C)}$ et $C_{F(B)}$ sont isotropes [7, Cor. 2.5(2)]. Si $\gamma_{F(B)}$ est isotrope, alors $\gamma_{F(C)}$ l'est aussi car $B_{F(C)}$ est isotrope [1, Cor. 7.20]. D'après [10, Prop. 1.5], \tilde{C} est semblable à une sous-forme de $\tilde{\gamma}$. Réciproquement, si \tilde{C} est semblable à une sous-forme de $\tilde{\gamma}$, alors $\gamma_{F(B)}$ est isotrope du fait que $C_{F(B)}$ l'est également.

RÉFÉRENCES

- [1] D. W. Hoffmann, *Diagonal forms of degree p in characteristic p* , Contemp. Math. **344** (2004), 135-183.
- [2] D. W. Hoffmann, A. Laghribi, *Quadratic forms and Pfister neighbors in characteristic 2*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), 4019-4053.

- [3] M. Knebusch, *Grothendieck und Witttringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen*, S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. (1969-1970) 93–157.
- [4] M. Knebusch, *Specialization of quadratic and symmetric bilinear forms, and a norm theorem*, Acta Arithm. **24** (1973), 279–299.
- [5] A. Laghribi, *Quasi-hyperbolicity of totally singular quadratic forms*, Contemp. Math. **344** (2004), 237-248.
- [6] A. Laghribi, *Witt kernels of function field extensions in characteristic 2*, J. Pure Appl. Algebra **199** (2005), 167-182.
- [7] A. Laghribi, *On splitting of totally singular quadratic forms*, Rend. Circ. Mat. Palermo. **53** (2004), 325-336.
- [8] A. Laghribi, *The norm theorem for totally singular quadratic forms*, Rocky Mountain J. Math. **36** (2006), 575-592.
- [9] A. Laghribi, *Sur le déploiement des formes bilinéaires en caractéristique 2*, Pacific J. Math. **232** (2007), 207-232.
- [10] A. Laghribi, U. Rehmann, *On bilinear forms of height 2 and degree 1 or 2 in characteristic 2*, J. Algebra **322** (2009), 1-12.
- [11] A. Laghribi, *Les formes bilinéaires et quadratiques bonnes de hauteur 2 en caractéristique 2*, Math. Z. (à paraître).
- [12] T. Y. Lam, *Introduction to Quadratic Forms over Fields*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 67. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [13] J. Milnor, D. Husemoller, *Symmetric bilinear forms*, New York, Heidelberg: Springer 1973.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES DE LENS EA2462, FACULTÉ DES SCIENCES
JEAN PERRIN, RUE JEAN SOUVRAZ - SP18, F-62307 LENS
Courriel: laghribi@euler.univ-artois.fr