Dr. D. Frettlöh 5.11.2010

Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden der Biowissenschaften III

Fourieranalysis

Blatt 4

Aufgabe 12:
Zeigen Sie, dass die folgenden f_n alle in $L^2([-\pi,\pi])$ liegen. Zeigen Sie dann, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_2$ ist, wobei

$$f_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2x + n & \text{für } -\frac{1}{n} \le x < 0 \\ -n^2x + n & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 13:
Wir wissen wie ein Innenprodukt eine Norm definiert: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Zeigen Sie, dass man umgekehrt aus der Norm das Innenprodukt zurückbekommt durch

$$\langle x, y\rangle = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2.$$

Aufgabe 14:
Zeigen Sie die Parallelogrammgleichung in $C([-\pi;\pi])$: Für alle f, g in $C([-\pi,\pi])$ gilt:

$$\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2\|f\|_2^2 + 2\|g\|_2^2.$$

Warum heißt das "Parallelogrammgleichung"?

Aufgabe 15:
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen linear unabhängig (über $\mathbb{R}$) sind:
$f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = 1;$ $\quad s : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R},\ s(x) = \sin(x);$
$c : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R},\ c(x) = \cos(x)$

(Tipp: Das sind sie laut Definition, falls aus $\alpha f + \beta s + \gamma c = 0$ folgt, dass $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist. Und $\alpha f + \beta s + \gamma c = 0$ heißt: Für alle $x \in [-\pi,\pi]$ folgt: $\alpha f(x) + \beta s(x) + \gamma c(x) = 0$. Also insbesondere für bestimmte x, die man sich geschickt aussuchen darf...)

Abgabetermin: Freitag, 12.11.2010, 12 Uhr, Postfach 148 in Raum V3-128