

Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden der Biowissenschaften III  
Fourieranalysis

**Blatt 5**

**Aufgabe 16:**

Zeigen Sie die Orthogonalitätsaussage von Satz 4.15:  $f - \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k$  ist orthogonal zu  $e_j$  für  $1 \leq j \leq n$ . Dabei ist, wie üblich,  $e_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ ,  $e_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(\frac{k-1}{2} \cdot)$  für  $k$  ungerade,  $e_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\frac{k}{2} \cdot)$  für  $k$  gerade.

**Aufgabe 17:**

Nun, da wir wissen, dass die FR von  $f \in L^2$  in der Tat  $f$  darstellt (in dem Sinne, dass sie bzgl  $L^2$  gegen  $f$  konvergiert; bzw falls  $f$  diff-bar ist, sogar punktweise) noch einmal eine konkrete FR: Berechnen Sie die FR von  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Berechnen Sie damit die unendliche Summe

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \dots$$

(siehe auch Rückseite).

**Aufgabe 18:**

Zeigen Sie, dass in  $\ell^2$  (s. Skript) durch

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots), e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots), e_4 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

usw ein maximales ON-System gegeben ist.

**Aufgabe 19:**

Beweisen Sie folgende Aussage für Innenprodukträume (also  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ ):

$$\|h - f\|^2 + \|h - g\|^2 = \frac{1}{2}\|f - g\|^2 + 2\|h - \frac{f+g}{2}\|^2$$

Was ist  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$  ?

Herr Heuser berichtet in “Lehrbuch zur Analysis 2”: Jakob Bernoulli (Schweizer Mathematiker, 1655-1705) hatte sich vergeblich daran versucht, ebenso sein Bruder Johann (1667-1748). Erst im Jahr 1734 entdeckte Leonhard Euler (1707-1783, ebenfalls ein Schweizer Mathematiker, und einer der besten aller Zeiten) die Lösung. Diese Arbeit wurde allerdings erst 1740 veröffentlicht. Vorher berichtete Daniel Bernoulli (Sohn von Johann, Freund von Euler) seinem Vater davon. Dieser publizierte die langgesuchte Lösung bereits 1737 in einem seiner eigenen Bücher, ohne Euler zu erwähnen. Allerdings konnte Johann sich nicht zurückhalten, in der Veröffentlichung gegen seinen ungeliebten Bruder Jakob zu sticheln: “So wurde dem brennenden Wunsch meines Bruders Genüge getan, der ... offen zugegeben hatte, dass [diese Reihe] aller seiner Mühe gespottet habe ... Wenn doch der Bruder noch am Leben wäre!”.

Berechnen Sie mittels der Aufgaben 3(a) und 17 den Wert der obigen Reihe.

Dies ist eine Zusatzaufgabe, sie geht nur positiv in die Wertung ein. D.h., dass man auch ohne diese auf 100% kommen könnte.