Dr. D. Frettlöh 23.7.2007

Klausur
Vertiefung Mathematik I für NWI

Name: ____________________________________ Matrikelnummer: ____________________

Dauer der Klausur: 120 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben bearbeitet werden; besser weniger, dafür ordentlich. Bitte

- auf jedem Blatt den Namen vermerken,
- nicht auf eigenem Papier schreiben,
- auf diesem Blatt die Matrikelnummer angeben,
- nur erlaubte Hilfsmittel benutzen: Ein selbst gestaltetes *handgeschriebenes* DIN A4-Blatt, nicht programmierbarer Taschenrechner, Formelsammlung.

Verboten sind eigenes Papier und eigene Aufzeichnungen, die über das oben (Punkt 4) hinausgehen, sowie alle Arten von Computern, Telekommunikationsgeräten und Speichergeräten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: *(3 Punkte)*
Zeigen Sie, dass $u : [1, \infty[\to \mathbb{R},\ u(t) = \cos(\frac{1}{t})$ eine Lösung der Differentialgleichung $u' = \frac{1}{t^2}\sqrt{1 - u^2}$ ist.
Zeigen Sie, dass $u : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R},\ u(t) = (\sin(t))^2$ eine Lösung des Anfangswertproblems $u' = 2\cos(t)\sqrt{u},\ u(0) = 0$ ist.

Aufgabe 2: *(4 Punkte)* Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen (ohne das maximale Existenzintervall anzugeben):

(a) $u' = \frac{e^t}{u}$,

(b) $(t^2 + 1)u' + tu = 0$,

(c) $(1 - t^2)u + tu' = t$.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)* Zeigen Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöf (oder einer seiner Varianten), dass das Anfangswertproblem

$$u' = t^2u^2, \quad u(0) = 1,$$

eine eindeutige Lösung auf einem Intervall $[-a, a],\ a > 0$ besitzt. (Das a braucht nicht angegeben zu werden.)

Aufgabe 4: *(5 Punkte)* Gegeben sei das Anfangswertproblem $u' = -\frac{1}{t}u,\ u(1) = u_0 = 1$. Bestimmen Sie den Wert $u(2)$ exakt, sowie je eine Näherung mittels

(a) des Eulerverfahrens $u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n)$, Schrittweite $h = 1$ (ein Schritt),

(b) des Eulerverfahrens, Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ (zwei Schritte),

(c) des impliziten Eulerverfahrens $u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1})$, Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ (zwei Schritte).

Aufgabe 5: *(6 Punkte)* Gegeben ist die Differentialgleichung $u' = t^\alpha u$, $(\alpha \in \mathbb{R})$. Bestimmen Sie alle Werte für α, so dass für jede Lösung $u(t)$ der DGl auf dem Intervall $[0, +\infty[$ gilt: $u(t) \to 0$ für $t \to 0$.

Aufgabe 6: *(5 Punkte)* Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u''' - 5u'' + 8u' - 4u = 0,\ u(0) = 1,\ u'(0) = 2,\ u''(0) = 1.$$

Aufgabe 7: *(8 Punkte)* Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des folgenden Systems linearer Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} u' &= 2u + v - 3w \\ v' &= u + 2v + 3w \\ w' &= 3w. \end{aligned} \tag{1}$$

Bestimmen Sie alle $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$, so dass $e^{3t}\boldsymbol{a}$ eine Lösung von (1) ist.

Aufgabe 8: *(6 Punkte)* Beweisen Sie, dass die Lösungen der Differentialgleichung

$$u' = \frac{\alpha}{t}u + \alpha - 1 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

für $t > 0$ genau dann Polynome sind, wenn α eine nichtnegative ganze Zahl ist.