Dr. D. Frettlöh 24.4.2009

<u>Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden der Biowissenschaften II</u>

<u>Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik</u>

Blatt 2

Aufgabe 5:
Wir betrachten die Augensumme von zwei aufeinanderfolgenden Würfen mit einem gezinkten Würfel, wobei $P(1) = \frac{1}{10}$, $P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{3}{20}$ und $P(6) = \frac{3}{10}$. Stellen Sie das Wahrscheinlichkeitsmaß P graphisch dar, und berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von P.

Aufgabe 6:
Die Zipfsche Verteilung auf $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$ ist gegeben durch

$$P(k) = \frac{k^{-s}}{\sum_{n=1}^{N} n^{-s}}, \quad \text{wobei } s \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist und berechnen Sie Erwartungswert und Varianz für a) $s = 0$ und b) $s = 1$.

Tipp zu b): Ein Ausdruck $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ lässt sich i.Allg. nicht weiter vereinfachen. Kürzen Sie ihn mit H_N ab.

Aufgabe 7:
Die Zipfsche Verteilung (s. Aufg. 6) beschreibt z.B. die Häufigkeit von Wörtern in Texten (kommen in einem sehr langen Text N verschiedene Wörter vor, so taucht das häufigste mit Häufigkeit $P(1)$ auf, das zweithäufigste mit Häufigkeit $P(2)$ usw., dabei ist $s = 1$); oder die Größe von Städten in einem Land: Von allen G Stadtbewohnern in diesem Land leben $G \cdot P(1)$ in der größten Stadt, $G \cdot P(2)$ in der zweitgrößten Stadt usw.

In Deutschland gibt es etwa 100 Städte mit mehr als 100.000 Einwohnern, darin leben insgesamt 25.420.000 Menschen. Berechnen Sie $G \cdot P(i)$ für $i = 1, 2, 3, 4$ und verschiedene Parameter s. Finden sie ein s, das den echten Werten möglichst nahe kommt: Die vier größten deutschen Städte sind Berlin mit 3.416.255 Einwohnern, Hamburg mit 1.770.629, München mit 1.311.573 und Köln mit 995.397 Einwohnern (Stand 2007).

Computer sind ausdrücklich erlaubt.

bitte wenden

Aufgabe 8:
Gegeben ist ein fairer Würfel mit n Seiten, dessen Seiten beschriftet sind mit $1, 4, 9, 16, \ldots n^2$. Es wird einmal gewürfelt. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes.

Aufgabe 9:
Auf $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ ist P gegeben durch $P(k) = \frac{-p^k}{k \log(1-p)}$ (dabei ist $0 < p < 1$). Zeigen Sie, dass P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω ist und berechnen sie Erwartungswert und Varianz von P.

Aufgabe 10:
Am Ende einer Fernsehshow wird der Sieger vor drei Türen A, B und C gestellt. Hinter zwei der Türen sind Nieten, hinter der dritten verbirgt sich der Hauptgewinn. Nachdem der Kandidat zufällig eine Tür ausgewählt hat (z.B. die Tür A), wird diese nicht sofort geöffnet. Stattdessen öffnet der Showmaster, der natürlich die "richtige" Tür kennt, eine der beiden anderen Türen (z.B. die Tür C) und zeigt dem Kandidaten, dass sich dahinter eine Niete befindet. Jetzt hat der Kandidat zwei Möglichkeiten: Er kann bei der ursprünglich von ihm gewählten Tür bleiben (im Beispiel die Tür A) oder seine Meinung ändern und sich für die dritte, noch ungeöffnete Tür (im Beispiel die Tür B) entscheiden. Welches Vorgehen optimiert die Gewinnwahrscheinlichkeit des Kandidaten?

Berechnen Sie für beide Strategien des Kandidaten jeweils die Wahrscheinlichkeit, mit der er die zum Gewinn führende Tür auswählt.

Tipps:

$\sum_{i=1}^{N} n^2 = \frac{1}{6} N(N+1)(1+2N)$.

$\sum_{i=1}^{N} n^4 = \frac{1}{30} N(1+N)(1+2N)(-1+3N+3N^2)$.

$-\log(1-p) = p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} + \frac{p^4}{4} + \cdots$.

Abgabetermin: Freitag, 8.5.2009, in der Vorlesung