Dr. D. Frettlöh 15.6.2009

Vorkurs Angewandte Mathematik

Lösungen Selbsttest 2

Aufgabe 1:

Zu a): $0 \leq \frac{100}{n^2-1} \leq 100 \cdot \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$, also Grenzwert 0.

Zu b): $\frac{2n^2+5n-1}{3n^2+n+1} = \frac{2+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \to \frac{2+0-0}{3+0+0} = \frac{2}{3}$.

Zu c): Trick: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Also $\big(1-\frac{1}{n^2}\big)^n = \big(1^2 - (\frac{1}{n})^2\big)^n = \big((1-\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\big)^n = \big(1-\frac{1}{n}\big)^n\big(1+\frac{1}{n}\big)^n \to \exp(-1)\exp(1) = e^{-1}e = e^{1-1} = e^0 = 1$

Zu d): $0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n} \to 0$, also Grenzwert 0.

Zu e): $\frac{(-1)^n+n}{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{n}{2n+1} = \frac{\frac{(-1)^n}{n}}{2+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \to \frac{0}{2+0} + \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$.

Zu f): $\big(1+\frac{1}{n}\big)^2 = \big(1+\frac{1}{n}\big)\big(1+\frac{1}{n}\big) \to (1+0)(1+0) = 1$.

Aufgabe 2:

Zu a): $\frac{n^2+1}{3n^2+3n+3} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}} \to \frac{1+0}{3+0+0} = \frac{1}{3}$, also ist's keine Nullfolge, daher ist die Reihe divergent (Satz 4.3 der Vorlesung).

Zu b): Mit Quotientenkriterium: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \to \frac{1}{2} < 1$, also ist die Reihe konvergent.

Zu c): Mit Leibnizkriterium: $\frac{(-1)^{n+1}n}{2n^2+1} = (-1)^n \frac{-n}{2n^2+1}$, und $\frac{-n}{2n^2+1} = \frac{-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}} \to \frac{0}{2+0} = 0$, also (wg. Leibniz) konvergiert die Reihe.

Zu d): $\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+n} = \frac{1}{n+1}$, und da die Reihe $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n+1} = \sum\limits_{m=2} \frac{1}{m}$ divergent ist, ist mit dem Majorantenkriterium auch die Reihe aus dieser Aufgabe divergent.

Zu e): Mit Wurzelkriterium: $\sqrt[n]{(\frac{n+100}{2n+7})^n} = \frac{n+100}{2n+7} = \frac{1+\frac{100}{n}}{2+\frac{7}{n}} \to \frac{1}{2} < 1$, also konvergent.

Zu f) Wie in d): $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, also divergent.

Aufgabe 3:

Zu a): Das ist eine leicht getarnte geometrische Reihe:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^2)^n}\Big) - \frac{1}{2^0} - \frac{1}{2^2} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{4})^n\Big) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - \frac{5}{4} = \frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{16-15}{12} = \frac{1}{12}.$$

Zu b): Falls es bei $n=0$ starten würde, wäre es die Exponentialreihe für -1, hätte also den Wert $\sum\limits_{n=0} \frac{(-1)^n}{n!} = \exp(-1) = \frac{1}{e}$. So ist es die Exponentialreihe minus dem ersten Summanden (für $n=0$ also $\frac{(-1)^0}{0!} = 1$), also ist der Grenzwert $\frac{1}{e} - 1$.

Zu c): $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{5^n}+\frac{1}{n\cdot n!+n!}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5}{5^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\cdot(n+1)}=5\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$. Das erste ist eine geometrische Reihe, das zweite ist $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}=(\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!})-1=e-1$. Insgesamt ist der Grenzwert also $5\frac{1}{1-\frac{1}{5}}+e-1=\frac{25}{4}-1+e=\frac{21}{4}-e$.

Aufgabe 4:

$$\begin{aligned}
y=f(x)=5^{x+1}2^x+1 &\Leftrightarrow y=5\cdot 5^x2^x+1=5\cdot 10^x+1\\
&\Leftrightarrow \frac{y-1}{5}=10^x=\exp(\ln(10)x)\\
&\Leftrightarrow \ln(\frac{y-1}{5})=\ln(10)x\\
&\Leftrightarrow \frac{\ln(\frac{y-1}{5})}{\ln(10)}=x=f^{-1}(y).
\end{aligned}$$

Aufgabe 5:

$e^{2x}=e^x \Leftrightarrow (e^x)^2=e^x$, und mit $y:=e^x$ steht da $y^2=y$. Die Lösung davon kann man direkt sehen, oder mit der p-q-Formel die Lösungen von $y^2-y=0$ ausrechnen. Alle (beiden) Lösungen sind: $y=1$ und $y=0$. Also $e^x=1$ und $e^x=0$. Ersteres bedeutet $x=0$, letzteres gilt für kein $x\in\mathbb{R}$ (da $\exp(x)>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$). Also gibt es nur ein einziges x, dass die Gleichung erfüllt, nämlich $x=0$.

Aufgabe 6:

$\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}-\frac{2}{4}}=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$.