Universität Bielefeld
Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 9.4.2010

Sommersemester 2010

Mathematik II für NWI/Lineare Algebra

Übungszettel 1

Aufgabe 1: Sei $\{e_1, e_2\}$ die kanonische Basis im $\mathbb{R}^2$ und $e_1' = \frac{1}{2}(e_1 + \sqrt{3}\, e_2)$, $e_2' = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\, e_1 + e_2)$ eine um 60° gedrehte Basis.

(a) Sei $x = e_1 - e_2$. Geben Sie x bezüglich der Basis $\{e_1', e_2'\}$ an, d.h. berechnen Sie die Koeffizienten x_1', x_2' in $x = x_1' e_1' + x_2' e_2'$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basis $\{e_1', e_2'\}$, d.h. berechnen Sie die Matrix $A' = (a_{ij}')_{2\times 2}$ mit $f(e_i') = \sum_{j=1}^{2} a_{ji}' e_j'$. (Hinweis: Die Matrixdarstellung bezüglich der kanonischen Basis ist gerade A) Was fällt auf?

(c) Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = Cx$ mit $C = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrixdarstellung von g bezüglich der Basis $\{e_1', e_2'\}$. Was fällt auf?

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2: Seien A, B, T $n \times n$-Matrizen und T invertierbar. Weiters sei $B = T^{-1}AT$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass $B^n = T^{-1}A^nT$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Inverse von B durch $B^{-1} = T^{-1}A^{-1}T$ gegeben ist.

(c) Zeigen Sie, dass $B^n = T^{-1}A^nT$ auch für $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

(2+1+1 Punkte)

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix ist. **(4 Punkte)**

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie, dass $(AB)^T = B^TA^T$ gilt.

(2 Punkte)

Abgabe bis zum 16.4.2010!