Universität Bielefeld

Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 11.6.2010

Sommersemester 2010

Mathematik II für NWI/Analysis

Übungszettel 10

Aufgabe 42: Im Folgenden sei A eine $d \times d$-Matrix, und $B_n := \sum_{j=0}^{n} A^j$.

(a) Zeigen Sie, dass $[A, B_n] = 0$ gilt, und weisen Sie die Formel $(\mathbf{1} - A) \cdot B_n = \mathbf{1} - A^{n+1}$ nach.

(b) Nun erfülle A zusätzlich die Bedingung $||A|| < 1$. Leiten Sie daraus ab, dass jeder Eigenwert λ von A die Ungleichung $|\lambda| < 1$ erfüllen muss.

(c) Zeigen Sie (unter der Annahme von (b)), dass $\mathbf{1} - A$ invertierbar ist.

(d) Folgern Sie nun, dass $B_n = (\mathbf{1} - A^{n+1})(\mathbf{1} - A)^{-1}$ und untersuchen Sie den Grenzwert $n \to \infty$.

(2+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 43: Im Folgenden seien U_i offene und A_i abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie:

(a) $U_1 \cap U_2$ ist offen.

(b) $A_1 \cup A_2$ ist abgeschlossen.

(c) $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ ist offen.

(d) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ ist abgeschlossen.

(e) Ist $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ stets offen?
<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie geeignet geschachtelte offene Kugeln.

(f) Ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ stets abgeschlossen?

(1+1+1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 44: Entscheiden Sie (mit Begründung!), ob Konvergenz vorliegt, und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\left((1 + \frac{\sin(n)}{n}, \frac{3n-5n^2}{n(n-1)(n+1)})^T \right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $(\langle v, w_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w_n = \begin{pmatrix} 1 + n + e^{-n} \\ 3 - n \end{pmatrix}$

(1+2+2 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 45: Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit:

(a) $f(x, y) = xy$

(b) $f(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(x + y) \\ \cos(xy) \end{pmatrix}$

(c) $f(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y = 0 \\ \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{sonst} \end{cases}$

(1+2+2 Punkte)

Abgabe bis zum 18.6.2010!