Universität Bielefeld

Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 15.6.2010

Sommersemester 2010

Mathematik II für NWI/Analysis

Übungszettel 11

Aufgabe 46: Berechnen Sie die Längen der Kurven, die durch folgende Parametrisierungen gegeben sind.

(a) $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch $f(t) := (r\cos t, r\sin t, ct)$, wobei $c \neq 0$ (Schraubenlinie).

(b) $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $f(t) := (t - \sin t, 1 - \cos t)$ (Zykloide – Bahn eines Punktes auf der Peripherie eines Kreises vom Radius 1, der auf der x-Achse der xy-Ebene abrollt).

Hinweis. Es gilt $2 - 2\cos t = 4\sin^2 \frac{t}{2}$.

(c) $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $f(t) := (a\cos t, b\sin t)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ (Ellipse mit den Halbachsen a und b).

Hinweis. Hier genügt es zu zeigen, dass die gesuchte Länge gegeben ist durch

$$b\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)\sin^2 t}\, dt \,.$$

(1+2+1 Punkte)

Aufgabe 47: Berechnen Sie sämtliche partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der folgenden zweimal stetig differenzierbaren Funktionen.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $f(x, y) := (x^5y^2, x^2y^2)$.

(b) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, gegeben durch $f(x) := Ax$, wobei $A = (a_{ij})$ eine relle $m \times n$-Matrix ist (hier ist $x \in \mathbb{R}^n$ natürlich als Spaltenvektor zu verstehen).

(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch $f(x, y) := (r\cos x\cos y, r\sin x\cos y, r\sin y)$, wobei $r > 0$ (das Bild von f ist die Kugelsphäre mit Radius r).

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 48: (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g\colon U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar (und damit total differenzierbar). Zeigen Sie, dass dann auch $f + g\colon U \to \mathbb{R}^m$, gegeben durch $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, stetig differenzierbar ist mit

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)\,.$$

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann auch $fg\colon U \to \mathbb{R}$, gegeben durch $(fg)(x) := f(x)g(x)$, stetig differenzierbar ist mit

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,.$$

(3+3 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 49: Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden stetig differenzierbaren Funktionen.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $f(x,y) := (\exp(x\cos(y^2)), x-y)$.

(b) f aus Aufgabe 47(c).

(2+2 Punkte)

Zusatzaufgabe 50: (a) Zeigen Sie, dass die Jacobi-Matrix der stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $f(r,\varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, stets invertierbar ist.

(b) Verwenden Sie das Newton-Verfahren, um die eindeutig bestimmte Schnittstelle der beiden Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) := x^2 + 2$ und $g(x) := \exp(x)$, näherungsweise zu bestimmen. Führt die von Ihnen gewählte Iteration mit beliebigem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ zum Ziel? Argumentieren Sie dazu mit dem Graphen der Funktion, deren Nullstelle Sie approximieren.

(2+3 Punkte)

Abgabe bis zum 25.6.2010!