Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 22.6.2010

Sommersemester 2010

Mathematik II für NWI/Analysis

Übungszettel 12

Aufgabe 51: Approximieren Sie die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x,y) = 3x^2y^2 - 4x^3y + 4$, im Punkt $(1,-1)$ einmal durch eine Polynomfunktion ersten Grades und einmal durch eine Polynomfunktion zweiten Grades.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 52: Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f\colon (0,2\pi) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x,y) = \sin x \sin y$. Bestimmen Sie auch die Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen.

(3+2 Punkte)

Aufgabe 53: Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x,y) = (4x^2 + y^2)\exp(-x^2 - 4y^2)$. Bestimmen Sie auch die Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass gilt

$$f'(x,y) = \exp(-x^2 - 4y^2)\big(x(-8x^2 - 2y^2 + 8), y(-8y^2 - 32x^2 + 2)\big)\,.$$

Die Hessematrix müssen Sie diesmal *nicht* berechnen. Es gilt $H(f)(x,y) =$

$$\exp(-x^2-4y^2)\begin{pmatrix} 16x^4 - 40x^2 + 4x^2y^2 + 8 - 2y^2 & 64x^3y - 68xy + 16xy^3 \\ 64x^3y - 68xy + 16xy^3 & 64y^4 - 40y^2 + 256x^2y^2 - 32x^2 + 2 \end{pmatrix}$$

(6+2 Punkte)

Aufgabe 54: Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und sei $f : U \to V$ eine stetig differenzierbare Bijektion mit stetig differenzierbarer Umkehrfunktion $f^{-1}\colon V \to U$. Zeigen Sie, dass die Matrix $f'(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar ist.

Hinweis. Wenden Sie die Kettenregel auf das Kompositum $f^{-1} \circ f$ an.

(4 Punkte)

Zusatzaufgabe 55: Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen und skizzieren Sie die Graphen.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x,y) = x^2 - y^2 + 3$.

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x,y) = \exp(-x^2 - y^2)$.

(2+3 Punkte)

Abgabe bis zum 2.07.2010!