Universität Bielefeld

Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 16.4.2010

Sommersemester 2010

Mathematik II für NWI/Lineare Algebra

Übungszettel 2

Aufgabe 5: Berechnen Sie die Determinanten

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

indem Sie die Matrizen auf obere Dreiecksform bringen. **(4 Punkte)**

Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass für jede obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ gilt: } \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

Hinweis: Bringen Sie A auf die Form E_n. Betrachten Sie zunächst den Spezialfall $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden: ist mindestens ein $a_{ii} = 0$, so gilt $\mathrm{Rg}(A) < n$. **(3 Punkte)**

Aufgabe 7: (a) Sei A eine $n \times n$- Matrix. Zeigen Sie:
$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

(b) Berechnen Sie die Determinanten der Elementarmatrizen

$$Q_k(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$P_{k\ell} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \cdots & & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \ell\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(bitte wenden)

$$R_{kl}(c) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & c & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow k\text{-te Zeile} \\ \uparrow \ell\text{-te Spalte} & \end{array}$$

(c) Begründen Sie, warum $\det(Q_k(c)A) = c \det A, \det(P_{k\ell}A) = -\det A, \det(R_{kl}(c)A) = \det A$ gilt. **(1+2+2 Punkte)**

Aufgabe 8: (a) Berechnen Sie die Zahl der Fehlstände der Transposition
$\tau = (k\ell) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & \ell-1 & \ell & \ell+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & k-1 & \ell & k+1 & \cdots & \ell-1 & k & \ell+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$ mit $k < \ell$.
Wie lautet $\operatorname{sign}(\tau)$?

(b) Berechnen Sie $\tau = \sigma^{-1}(12)\sigma$, wobei $k := \sigma^{-1}(1), \ell := \sigma^{-1}(2)$.
Hinweis: Berechnen Sie $\tau(k), \tau(\ell)$ und $\tau(i)$ für $i \neq k, \ell$.

(c) Begründen Sie, warum man jede Transposition $\tau = (k\ell)$ in der Form $\tau = \sigma^{-1}(12)\sigma$ darstellen kann. Wenn Sie alle σ angeben, für die $\tau = \sigma^{-1}(12)\sigma$ gilt, erhalten Sie einen Bonuspunkt. (Achtung: hier könnte eine Falle versteckt sein)

(2+2+1 Punkte)

Abgabe bis zum 23.4.2010!