Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 30.4.2010

Sommersemester 2010

Mathematik II für NWI/Lineare Algebra

Übungszettel 4

Aufgabe 14: Sei x ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie

(a) x ist ein Eigenvektor von A^n für alle $n \geq 1$. Wie lautet der entsprechende Eigenwert?

(b) Sei A invertierbar. Dann ist x auch Eigenvektor von A^{-1}. Wie lautet der entsprechende Eigenwert?

(c) Sei A invertierbar. Dann ist x ein Eigenvektor von A^n für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wie lauten die entsprechenden Eigenwerte? [Hinweis: Vergessen Sie den Fall $n = 0$ nicht.]

(d) Sei $B = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i A^i$ mit $a_i \in \mathbb{C}$. Dann ist x auch Eigenvektor von B. Wie lautet der entsprechende Eigenwert?

(1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 15: Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Sei x ein Eigenvektor von A^2 zum Eigenwert λ^2. Können wir daraus schließen, dass x auch ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist?

(1 Punkte)

Aufgabe 16: Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Wie lauten die Eigenräume und was sind die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte?

(4 Punkte)

Aufgabe 17: (a) Sei $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Eigenwerte von M, M^2 und M^3. Wie lauten ihre geometrischen Vielfachheiten? Was fällt auf?

(b) Eine Matrix N heißt nilpotent, falls ein $s \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $N^s = \mathbf{0}$ ist. Dabei sei $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ die Nullmatrix. Zeigen Sie, dass N nur den Eigenwert $\lambda = 0$ besitzt.

(4+1 Punkte)

(bitte wenden)

(c) [Bonusaufgabe] Sei N eine $n \times n$-Matrix, für die $N^n \neq \mathbf{0}$ gilt. Kann N nilpotent sein? [Hinweis: Betrachten Sie die Bildräume von N^k, d. h. im $(N^k) = \{N^k x | x \in \mathbb{C}^n\}$, (bzw. deren Kerne) und ihre Dimensionen.

(2 Bonuspunkte)

Aufgabe 18: Diagonalisieren Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

[Hinweis: Wiederholen Sie, was e^{ix} ist und wie das mit den Winkelfunktionen zusammenhängt.]

(4 Punkte)

Abgabe bis zum 07.5.2010!