Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Universität Bielefeld

Bielefeld, 7.5.2010

Sommersemester 2010

# Mathematik II für NWI/Lineare Algebra

## Übungszettel 5

**Aufgabe 19:** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Trigonalisieren Sie die Matrix $A$.
*Hinweis:* Verwenden Sie das rekursive Verfahren, das im Beweis des Satzes über die Trigonalisierbarkeit verwendet wurde.

(b) Sei $S$ eine Matrix, mit der $A$ auf obere Dreiecksform gebracht werden kann. Ist $S$ eindeutig bestimmt? Ist die obere Dreiecksform eindeutig festgelegt? (Begründung!)

**(4+1 Punkte)**

**Aufgabe 20:** Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

besitzt den Eigenvektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Beachten Sie, dass die erste Spalte ein Vielfaches der zweiten Spalte ist. Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $A$, ohne das charakteristische Polynom zu berechnen.

**(2 Punkte)**

**Aufgabe 21:** (a) Zeigen Sie, dass durch $||x||_1 := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ eine Norm auf dem Vektorraum $\ell_1$ der absolut konvergenten reellen Reihen definiert ist.

(b) Die Folge $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ sei durch

$$x^{(n)} := (\underbrace{\tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}}_{\text{n-mal}}, 0, \ldots)$$

gegeben. Konvergiert die Folge gegen $\xi = (0, 0, \ldots)$ in der oben definierten Norm $||\cdot||_1$?

(c) Konvergiert die obige Folge $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ in der Maximumsnorm $||x||_\infty := \max_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$?

(d) Sind die beiden Normen äquivalent? Lassen sich Konstanten $c_1 \in \mathbb{R}^+$ und $c_2 \in \mathbb{R}^+$ finden, sodass

$$||x||_\infty \leq c_1 ||x||_1 \quad \text{und} \quad ||x||_1 \leq c_2 ||x||_\infty$$

für alle $x \in \ell_1$ gilt?

**(2+1+1+1 Punkte)**

(bitte wenden)

**Aufgabe 22:** Sei $C^0[a,b]$ der Vektorraum der stetigen reellen Funktionen auf $[a,b]$.

(a) Sei $c$ eine strikt positive stetige Funktion auf $[a,b]$. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b c(x)f(x)g(x)\,dx$$

ein inneres Produkt auf $C^0[a,b]$ definiert ist.

(b) Wenn wir nun $c$ durch

$$c(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \setminus \{\frac{a+b}{2}\} \\ -1 & x = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

definieren, ist dann

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b c(x)f(x)g(x)\,dx$$

noch immer ein inneres Produkt?

(c) Ist durch

$$\langle f,g\rangle := \int_{\frac{a+b}{2}}^b c(x)f(x)g(x)\,dx$$

ein inneres Produkt definiert, wenn man $c$ geeignet wählt?

**(2+1+1 Punkte)**

**Abgabe bis zum 14.5.2010!**