Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 14.5.2010

Sommersemester 2010

Mathematik II für NWI/Lineare Algebra

Übungszettel 6

Aufgabe 23: Im $\mathbb{R}^3$ sei die Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Sei $U = \{cb_1 \mid c \in \mathbb{R}\}$. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$, indem Sie das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf $\mathcal{B}$ anwenden, die so erhaltene Basis heiße $\mathcal{B}'$.

(b) Berechnen Sie die Gram'sche Matrix von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$.

(3+1 Punkte)

Aufgabe 24: Sei $V = C^\infty[-1, 1]$ und U der Unterraum der Polynome vom Grad höchstens 2, d. h. $U = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Sei $\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von U, indem Sie das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf die Basis $\{1, x, x^2\}$ von U anwenden.

(4 Punkte)

Aufgabe 25: Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 = 4\langle x, y\rangle$

(b) $\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2$

Gelten diese Gleichungen auch in einem unitären Vektorraum?

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 26: Seien A und B hermitesche Matrizen. Sind dann auch $A + B, AB, iA$ und $AB + BA$ hermitesche Matrizen?

(2 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 27: Wiederholen Sie zunächst den Stoff aus Mathe I zu Differentialgleichungen und Anfangswertproblemen (AWP). Wir betrachten nun die Funktion f auf $\mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = e^{-x^2}$.

(a) Skizzieren Sie die Funktion und weisen Sie nach, dass f folgendes Anfangswertproblem löst:
$$f'(x) + 2x \cdot f(x) = 0, \qquad f(0) = 1.$$

(b) Zeigen Sie nun, dass f die einzige differenzierbare Funktion ist, die dieses Anfangswertproblem löst. Nehmen Sie dazu an, dass g eine Lösung sei, setzen Sie $h(x) = g(x)e^{x^2}$, und weisen Sie nach, dass dann $h(x) \equiv 1$ gelten muss.

(2+2 Punkte)

Abgabe bis zum 21.5.2010!