Universität Bielefeld
Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 21.5.2010

Sommersemester 2010

Mathematik II für NWI/Lineare Algebra/Analysis

Übungszettel 7

Aufgabe 28: Zeigen Sie:

(a) Sind A und B unitär, so ist AB unitär.

(b) Ist A unitär, so gilt $|\det A| = 1$.

(c) Jede Matrix aus $SO(2)$ lässt sich in der Form
$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
mit $\alpha \in \mathbb{R}$ darstellen.

(1+1+2 Punkte)

Aufgabe 29: Finden Sie die duale Basis der Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 30: Sei V ein euklidischer/unitärer Vektorraum und $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis. Zeigen Sie, dass für $x, y \in V$ gilt:

(a) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\langle b_i, x \rangle} \langle b_i, y \rangle$

(b) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle b_i, x \rangle|^2$

Gelten die obigen Formeln auch, wenn $\{b_1, \ldots, b_n\}$ keine Orthonormalbasis ist? Wenn ja, warum? Wenn nein, wie muss man die Formeln modifizieren?

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 31: Ist $\|.\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^d$, so heißt $\mathcal{B}_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq 1\}$ die (abgeschlossene) Einheitskugel zur Norm $\|.\|$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_1(0)$ konvex ist.
<u>Hinweis:</u> Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ heißt konvex, wenn für beliebige $x, y \in A$ auch $\alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot y \in A$ gilt, und zwar für alle $0 \leq \alpha \leq 1$.

(b) Sei nun $d = 2$, wir betrachten also die Ebene. Zeichnen Sie die Einheitskugeln für die Normen $\|.\|_1, \|.\|_2$ und $\|.\|_\infty$.

(c) Was sind die Einheitskugeln von $\|.\|_1$ und $\|.\|_\infty$ im $\mathbb{R}^3$?

(1+1+2 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 32: Wir betrachten noch einmal das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} f' &= af \\ f(x_0) &= c. \end{aligned}$$

Wir wissen schon, dass $f(x) = c \cdot e^{a(x-x_0)}$ die eindeutige Lösung ist. Dies wollen wir jetzt mittels Volterra-Iteration noch einmal bestätigen.

Das Anfangswertproblem wird zunächst in die Volterra-Integralgleichung umgewandelt:

$$f(x) = c + a \int_{x_0}^{x} f(\xi) d\xi.$$

Nun betrachten wir die Iterationsfolge

$$f_{n+1}(x) = c + a \int_{x_0}^{x} f_n(\xi) d\xi$$

für $n \geq 0$, mit Anfangsbedingung $f_0(x) \equiv c$.

(a) Berechnen Sie f_n für $1 \leq n \leq 3$.

(b) Welche Formel gilt für f_n mit $n \in \mathbb{N}_0$?
Beweis?

(c) Wie kommt man damit auf die Lösung $f(x)$?

(2+3+1 Punkte)

Abgabe bis zum 28.5.2010!