Universität Bielefeld

Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 28.5.2010

Sommersemester 2010

Mathematik II für NWI/Analysis

Übungszettel 8

Aufgabe 33: Berechnen Sie e^M für

(a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Hinweis: Berechnen Sie zunächst M^n für n ≥ 0 (mit Beweis!)

(c) Was sind $\cosh(M)$ und $\sinh(M)$ für die Matrix aus (a)?

(1+2+2Punkte)

Zusatzaufgabe

(d) Gilt $\cosh(M)^2 - \sinh(M)^2 = \mathbf{1}$ in (c)?

(1 Zusatzpunkt)

Aufgabe 34: Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' + 4xy - 8x = 0$ mit $y(0) = 1$. Für welche x ist die Lösung wohldefiniert?

Hinweis: Lösen Sie zunächst die homogene Gleichung $y' + 4xy = 0$ (Variablentrennung). Bestimmen Sie dann eine spezielle Lösung (mit Variation der Konstanten). Bilden Sie nun die allgemeine Lösung der Gleichung und legen Sie schließlich die Konstante darin durch die Anfangsbedingung fest.

(4 Punkte)

Zusatzfrage: Kann man hier auch ohne die Rechnung mit der Variation der Konstanten auskommen?

(1 Zusatzpunkt)

Aufgabe 35: Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $y' = x + \cos(x), \quad y(0) = 1$

(b) $y' = \sin(x) \cdot y, \quad y(0) = 1$

(c) $y' = y - y^2, \quad y(0) = \alpha \quad (\alpha > 0)$

(d) Skizzieren Sie die Lösung für (c) für die Anfangsbedingung $y(0) = \alpha$, mit $\alpha \in \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$

(1+2+1+1 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 36: Zeigen Sie

(a) $\det(e^M) = e^{\operatorname{tr}(M)}$
<u>Hinweis:</u> Nehmen Sie dazu an, dass M diagonalisierbar ist, mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Gilt das Resultat auch allgemein?

(b) e^M ist stets invertierbar, mit $(e^M)^{-1} = e^{-M}$. **(2+2 Punkte)**

Aufgabe 37: Lösen Sie das DGL-System

$$\dot{\boldsymbol{y}} = M\boldsymbol{y} \quad , \text{ mit } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und der Anfangsbedingung $\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(3 Punkte)

Abgabe bis zum 04.6.2010!