Universität Bielefeld

Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 16.7.2010

Sommersemester 2010

Mathematik II für NWI/Lineare Algebra

Freiwillige Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Aufgabe 65: Sei $\{b_1, \cdots, b_n\}$ eine Basis von V und $\{b_1^*, \cdots, b_n^*\}$ die duale Basis.

(a) Zeigen Sie, dass $p_k(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \langle b_i^*, x\rangle b_i$ eine Projektion ist. .

(b) Berechnen Sie $p_k \circ p_\ell$.

(c) $q_\ell(x) = \sum\limits_{i=\ell}^{n} \langle b_i^*, x\rangle b_i$ ist ebenfalls eine Projektion.
Für welche Werte von k und ℓ gilt $p_k \circ q_\ell = 0$?
Für welche Werte von k und ℓ ist $p_k + q_\ell$ eine Projektion?

Aufgabe 66: Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 5 \end{pmatrix}$ aus Aufgabe 62.

(a) Berechnen Sie für die beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2 die entsprechenden Projektionsmatrizen P_{λ_1} und P_{λ_2}.

(b) Rechnen Sie nach, dass tatsächlich

$$A = \lambda_1 P_{\lambda_1} + \lambda_2 P_{\lambda_2} \qquad \text{und} \qquad E_2 = P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2}$$

gilt.

(c) Berechnen Sie A^{-2}.

(d) Berechnen Sie nochmals $A^{\frac{1}{2}}$ und $\ln A$.

Aufgabe 67: Sei $V = C^0(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $p : V \to V, p(u) := \frac{1}{2}(u + \tilde{u})$ eine Projektion ist, wobei $\tilde{u}$ durch $\tilde{u}(x) := u(-x)$ für $u \in V$ definiert ist.