Lösungen und Lösungshinweise für ausgewählte Klausuraufgaben

1 (a):

$$\binom{1/5}{2} = \frac{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}-1\right)}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{-4}{5} = -\frac{2}{25}$$

<u>Hinweis:</u> Die Definition der Binomialkoeffizienten aus der Schule (und aus manchen Formelsammlungen) ist nicht allgemein genug (und außerdem zum Rechnen zu kompliziert)!

1 (b): Induktion ist hier unnötig kompliziert, es geht einfacher so:

$$1 + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(2^n - 2) \qquad\qquad (\text{da} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2^n = 2^{n-1}.$$

2 (d): $\frac{1}{1+x^2}$ ist differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$, denn das Polynom $1+x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und ≥ 1 (nimmt also nie den Wert 0 an), und $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{y}\big|_{y=1+x^2}$. Daraus folgt die Behauptung nach der Kettenregel, da die Funktion $y \mapsto \frac{1}{y}$ für $y \neq 0$ differenzierbar ist.

3 (a): Wegen $\frac{n+\sin(n)}{5n+3} = \frac{1+\frac{\sin(n)}{n}}{5+\frac{3}{n}}$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(n)}{n} = 0$ ($\sin(n)$ ist beschränkt) folgt nach den Rechenregeln für Grenzwerte die Existenz des Limes, mit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sin(n)}{5n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{\sin(n)}{n}}{5+\frac{3}{n}} = \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(n)}{n}}{5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}} = \frac{1}{5}$$

<u>Hinweis:</u> Es liegt zwar ein Ausdruck der Form "$\frac{\infty}{\infty}$" vor, aber l'Hospital ist <u>nicht</u> anwendbar, da der Quotient der Ableitungen $\frac{1+\cos(n)}{5}$ lautet. Diese Folge konvergiert aber <u>nicht</u> - was jedoch Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Regel wäre!

3 (c): $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\pi^2)^k}{2k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\Bigg|_{x=\pi}$

Nun ist $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ eine Potenzreihe mit Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$, also konvergiert die Summe und zwar gegen $\cos(\pi) = -1$.

5 (a): Man kann natürlich unter dem Integral ausmultiplizieren und dann Term für Term integrieren. Schneller geht Substitution $y = x + 3, dy = dx : \int\limits_0^1 (x+3)^2 dx = \int\limits_3^4 y^2 dy$ (Grenzen)!

$= \frac{1}{3} y^3 \big|_3^4 \quad = \frac{1}{3}(4^3 - 3^3) = \frac{1}{3}(64 - 27) = \frac{37}{3} = 12\frac{1}{3}$

5 (d): Hier führt partielle Integration nicht zum Ziel. Vielmehr klappt die Substitution $y = x^2, dy = 2xdx : \int x \cdot e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{-y} dy$

$= C - \frac{1}{2} e^{-y} = C - \frac{1}{2} e^{-x^2}$

7 (b): Aus Aufgabe 7a, kennen wir

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Die Lösung von $Ax = b$ ist

also $x = A^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8 (b): $z^2 = i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ [Polardarstellung von i]

[Da es eine quadratische Gleichung ist, gibt es zwei Lösungen]. Aus der Vorlesung wissen wir:

$z_1 = e^{\frac{1}{2}(\frac{i\pi}{2})} = e^{\frac{i\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$z_2 = e^{i\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi i}{2}} = \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = -e^{i\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

9 (b): Die Funktionen sind linear abhängig, da $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ gilt, d.h. $e^{ix} - \cos x - i \sin x = 0$.

9 (d): Ja. Wegen $b_i = e_{n-i+1}$ [man beachte $\delta_{i,n-j+1} = \delta_{n-i+1,j}$] sind die Vektoren $b_1, \cdots, b_n$ gerade die kanonischen Basisvektoren $e_1, \cdots, e_n$, nur

in einer anderen Reihenfolge geschrieben. Daher lässt sich jeder Vektor aus $\mathbb{R}^n$ als Linearkombination der b_i schreiben.

10 (c): Aus $Df = f' = 0$ folgt mit einem Satz aus der Vorlesung, dass $f(x) = c$ gilt, also dass f konstant ist. Daher gilt $\ker(D) = \{f \in C^\infty(R) | f \text{ ist konstant}\}$. Eine Basis ist $\{1\}$, da jede konstante Funktion ein Vielfaches der Funktion $f : R \to \mathbb{R}, f(x) = 1$ ist.

Einige Fehlerhighlights

- e^{ix} ist linear unabhängig
- $\sqrt{17}$ ist nicht algebraisch, weil es keine relle Zahl ist.
- $\frac{1}{5} - 1 = -\frac{1}{5}$
- $\frac{\frac{4}{25}}{2} = \frac{8}{25}$
- $\sqrt{17}$ ist nicht algebraisch, da ungerade Zahl (17) von gerader Zahl x^2 nicht 0 ergeben kann.
- $\binom{1/5}{2} = \left(\frac{1}{120}\right)^{-\left(\frac{218283}{20}\right)}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\pi^2)^k}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\pi^2\right)^{\frac{1}{k}} \nearrow \text{Nullfolge}}{(2)!} = \frac{1}{2}$
- $\sqrt{17}$ ist nicht algebraisch, da Algebra ein Teil d. Mathematik ist, in der es um Strukturen, Relationen und Mengen geht.
- e ist nur annährbar als $3 < e < 4$ (nicht berechenbar)
- $\frac{e^x}{|x|}$ ist auf [-1, 1] stetig, weil es an den Stellen $f(x)$ ein x gibt
- e ist aus $\mathbb{R}$ und ist unendliche Zahl
- $\frac{1}{n}\sin(n) = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
- $\frac{1}{n}\sin(n) = \sin(1)$

Hinweise zu elementaren Fehlern

Die Klausur enthielt einige Teilaufgaben mit Schulstoff. Dabei scheiterten (trotzdem!):

1. 31% an der Berechnung des Binominalkoeffizienten $\binom{7}{3}$
2. 33% an der Ableitung von $(2x+5)^3$;
3. 54% an der Berechnung des Integrals $\int_0^1 (x+3)^2 dx$, und
4. 34% an der Lösung des linearen Gleichungssystems

   $$Ax = b \text{ mit } \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$