Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 16.10.2009

Wintersemester 2009/10

Mathematik I für NWI/Analysis

Übungszettel 1

Aufgabe 1: (a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Richtigkeit der Formeln

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}\, n \left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1)$$

und

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(b) Geben Sie für die zweite Formel einen alternativen Beweis ohne Verwendung der vollständigen Induktion an.

(2 + 2 Punkte)

Aufgabe 2: (a) Berechnen Sie

$$\binom{10}{k} \quad \text{für} \quad 0 \leqslant k \leqslant 10,$$

sowie

$$\binom{1/2}{k} \quad \text{und} \quad \binom{-1/2}{k} \quad \text{für} \quad 0 \leqslant k \leqslant 5.$$

(b) Beweisen Sie durch Induktion, dass

$$\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha+1}{1} + \binom{\alpha+2}{2} + \ldots + \binom{\alpha+n}{n} = \binom{\alpha+1+n}{n}$$

gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2 + 2 Punkte)

Aufgabe 3: Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Formel (für $n \in \mathbb{N}_0$)

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

per Induktion.

(4 Punkte)

Aufgabe 4: Für jedes $0 < q < 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n < \frac{1}{1-q}.$$

Stimmt diese Aussage? Begründen Sie Ihre Antwort.

(2 Punkte)

Abgabe bis zum 23.10.2009!