Universität Bielefeld

Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 18.12.2009

Wintersemester 2009/10

Mathematik I für NWI/Lineare Algebra

Übungszettel 10

Aufgabe 37: Sei $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie I^2, I^3 und I^4.

(b) Sei $U = \{\, aE + bI \mid a, b \in \mathbb{R} \,\}$. Zeigen Sie: Sind $A, B \in U$, so ist auch $AB \in U$.

(c) Zeigen Sie, dass $AB = BA$ für alle $A, B \in U$.

(d) Sei $A = aE + bI \in U$. Zeigen Sie, dass A invertierbar ist, falls $a \neq 0$ oder $b \neq 0$.
Hinweis: Überprüfen Sie, dass A^{-1} durch $A^{-1} = \dfrac{1}{a^2 + b^2}(aE - bI)$ gegeben ist.

(e) Woran erinnert Sie U?

(1+1+1+2+1 Punkte)

Aufgabe 38: Sei $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+ \right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass U bezüglich der Matrizenmultiplikation abgeschlossen ist, d.h. $AB \in U$ falls $A, B \in U$.

(b) Zeigen Sie, dass $E' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$ ein rechtsseitig neutrales Element bezüglich der Matrizenmultiplikation in U ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/b \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$ ein linksseitig inverses Element von $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \in U$ ist, d.h. $\tilde{A}A = E'$.

(d) Ist U zusammen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe? Wenn ja, weisen Sie die Gruppenaxiome nach. Wenn nein, geben Sie mindestens zwei Gruppeneigenschaften an, die verletzt sind.

(1+1+1+2 Punkte)

Aufgabe 39: Sei A die folgende $n \times n$-Matrix.

$$A = (a_{ij})_{n \times n}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i + 1 - j \text{ durch } n \text{ teilbar} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Geben Sie A für $n = 4$ an.

(b) Berechnen Sie A^m.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst A^2 und stellen Sie dann eine Vermutung für A^m auf (Beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion!).

(1+3 Punkte)

Aufgabe 40: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Geben Sie alle Matrizen B an, für die $AB = E_2$ gilt. Zeigen Sie, dass es keine Matrix C mit $CA = E_3$ gibt.

(3 Punkte)

Testaufgaben vom Klausurtyp

Vorbemerkung: Wiederholen Sie zunächst den Stoff aus der Vorlesung. Ein erfolgreiches (und sicheres) Lösen der Aufgaben ist ohne die Vorlesung als Fundament nicht möglich.

K1: Zeigen Sie:

(a) $\sqrt{2}$ ist eine algebraische Zahl.

(b) $3e$ ist irrational.

K2: Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge rationaler Zahlen, mit $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Entscheiden Sie (mit Begründung), ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) b ist eine reelle Zahl.

(b) b ist eine rationale Zahl.

(c) b ist eine algebraische Zahl.

K3: Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3n+1}{2n^2+7n+5}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

K4: Berechnen Sie die Summe folgender Reihen (sofern diese existiert – begründen!):

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

K5: Beweisen Sie per Induktion die Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + \ldots + n)^2$$

Hinweis: $1 + \ldots + n = \dfrac{1}{2}\, n\,(n+1)$

K6: Beweisen Sie die Formel

$$\sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \cdot \binom{n}{\ell} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

K7: Welche der folgenden Funktionen sind auf dem Intervall $[0,1]$ stetig? Begründung!

(a) $(x-1)^2$

(b) $\dfrac{1}{x-1}$

K8: Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen:

(a) $f(x) = \sin(x) \cdot e^{x^2}$

(b) $g(x) = \dfrac{\cosh(x)}{x^2-1}$

K9: Seien $f\colon U \to V$ und $g\colon U \to V$ linear. Zeigen Sie, dass $f+g$ linear ist.

K10: Zeigen Sie $A(BC) = (AB)C$, wenn A, B, C Matrizen geeigneter Dimension sind. Was bedeutet "geeignete Dimension"?

K11: Der Kern einer linearen Abbildung $f\colon U \to V$ ist als $\ker f := \{\, x \in U \mid f(x) = 0 \,\}$ definiert. Zeigen Sie, dass $\ker f$ ein Unterraum von U ist und dass $\dim \ker f \leqslant \dim U$.

K12: Bilden die folgenden Mengen eine Basis des $\mathbb{C}^3$ über $\mathbb{C}$? Begründung!

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i^3 \\ i^2 \\ i^5 \end{pmatrix} \right\}$

K13: Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen zusammen mit $+$ und $\cdot$ einen Körper bilden (mit Begründung):

(a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, wobei $+$ und $\cdot$ die üblichen Rechenoperationen in $\mathbb{R}$ sind.

(b) $(\mathrm{GL}(n), +, \cdot)$, wobei $+$ und $\cdot$ Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation sind.

(c) $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$, wobei $+$ und $\cdot$ die üblichen Rechenoperationen in $\mathbb{R}$ sind.

Die Lösungen der Aufgaben **K1 − K13** können Sie mit abgeben um sich Ihr Punktekonto aufzubessern. Es gibt maximal 1 Punkt pro Aufgabe.

Abgabe bis zum 8.1.2010!

Frohe Weihnachtszeit und einen guten Rutsch ins Jahr 2010!