Universität Bielefeld
Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 8.1.2010

Wintersemester 2009/10

Mathematik I für NWI/Lineare Algebra und Analysis

Übungszettel 11

Aufgabe 41: Lösen Sie die Gleichungssysteme $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Folgern Sie daraus, wie die Inverse von $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ lautet! Lösen Sie mit ihrer Hilfe das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 42: Sei $f\colon U \to V$ ein Isomorphismus und $g\colon U \to U$ eine lineare Abbildung. Dann ist auch $h\colon V \to V$, $h = f \circ g \circ f^{-1}$ eine lineare Abbildung (warum? – 1 Extrapunkt).

(a) Zeigen Sie: Ist g surjektiv, so ist auch h surjektiv.

(b) Gilt auch die Umkehrung, d.h. ist g surjektiv, wenn h surjektiv ist?

(c) Sei $U = \{\text{reelle Polynome vom Grad}\, n \leqslant 4\}$ und $V = \mathbb{R}^5$. Dann ist durch

$$f\colon U \to V, \quad a_0 + a_1 x + \ldots + a_4 x^4 \mapsto \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_4 \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus definiert. Die Abbildung $D\colon U \to U$, $D(P) = P'$ ("Differenzieren") ist linear. Geben Sie die Abbildung $h\colon V \to V$, $h = f \circ D \circ f^{-1}$ explizit an.

(d) Seien U, D wie in (c). Dann ist $B = \{b_0, \ldots, b_4\} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ eine Basis von U. Wie lautet die Matrix $A = (a_{ij})$, die der Abbildung D bezüglich der Basis B entspricht, d.h. $D(b_j) = \sum_i a_{ij} b_i$? Wie hängt A mit h zusammen?

(e) Wie lauten die Abbildungen $D \circ D$, $h \circ h$, und die der Abbildung $D \circ D$ entsprechende Matrix $A^{(2)}$ bezüglich der Basis B?

(1+1+1+1+2 Punkte)

Aufgabe 43: Wir betrachten $C_0(I)$, den Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall I, das als abgeschlossen angenommen wird, und definieren für $f \in C_0(I)$:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

(Dabei ist das Supremum auf der rechten Seite die kleinste reelle Zahl c, für die $|f(x)| \leqslant c$ gilt für alle $x \in I$.) Beweisen Sie folgende Eigenschaften:

(a) $\|f\|_\infty \geqslant 0$, mit $\|f\|_\infty = 0$ genau für $f = 0$;

(b) $\|\alpha \cdot f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ für beliebige $f, g \in C_0(I)$.

Bemerkung: Die Funktion $\|\cdot\|_\infty\colon C_0(I) \to \mathbb{R}$ ist mit diesen Eigenschaften eine Norm auf $C_0(I)$.

(2+1+2 Punkte)

Aufgabe 44: Sei $I = [a, b]$ kompakt und bezeichne $\mathcal{T}(I)$ die Menge der Treppenfunktionen auf I. Zeigen Sie:

(a) $f \in \mathcal{T}(I) \implies |f| \in \mathcal{T}(I)$;

(b) $f, g \in \mathcal{T}(I) \implies \max(f, g) \in \mathcal{T}(I)$, $\min(f, g) \in \mathcal{T}(I)$;

(c) $f \in \mathcal{T}(I) \implies f$ ist beschränkt.

(1+2+1 Punkte)

Abgabe bis zum 15.1.2010!