Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 22.1.2010

Wintersemester 2009/10

Mathematik I für NWI/Lineare Algebra

Übungszettel 13

Aufgabe 50: Eine Teilmenge U eines Vektorraums V heißt affiner Unterraum von V, wenn ein Vektor $x \in V$ und ein Unterraum W von V existieren, so dass $U = x + W$ ist. Sei nun $U = x + W$ ein affiner Unterraum.

(a) Zeigen Sie $\{ v - w \mid v, w \in U \} = W$, d.h. die Differenzen der Vektoren aus U bilden den Unterraum W von V.

(b) Muss $x \in U$ gelten? Ist x eindeutig bestimmt? Ist W eindeutig bestimmt?

(c) Sei $f\colon V \to V'$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge U der Gleichung $f(x) = c$, $c \in V'$, entweder die leere Menge oder ein affiner Unterraum ist. Was ist W in diesem Fall?

(d) Die Dimension des affinen Unterraums U ist durch $\dim U := \dim W$ definiert. Sei f wie oben. Sei $\dim V = n_1$, $\dim V' = n_2$ und $\dim \ker(f) = n_3$. Was ist die Dimension des affinen Lösungsraumes $U = \{ x \mid f(x) = c \}$, falls U nicht leer ist?

(2+2+2+1 Punkte)

Aufgabe 51: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie die Gleichung $Ax = b$ mit Hilfe des Verfahrens aus Bemerkung 4.31. Geben Sie die gesamte Lösungsmenge an. Was ist der Rang von A, welche Dimension hat der (affine) Lösungsraum? (siehe Aufgabe 50)

(4 Punkte)

Aufgabe 52: Bringen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

auf Zeilenstufenform. Welchen Rang hat A? Ist A invertierbar?

(3 Punkte)

Aufgabe 53: Invertieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

falls sie invertierbar ist.

(3 Punkte)

Abgabe bis zum 29.1.2010!