Universität Bielefeld

Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 23.10.2009

Wintersemester 2009/10

Mathematik I für NWI/Analysis

Übungszettel 2

Aufgabe 5: Es sei $|a| := \max\{a, -a\}$. Zeigen Sie (durch eine geeignete Fallunterscheidung), dass die Dreiecksungleichung

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

gilt, und zwar für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$.

(2 Punkte)

Aufgabe 6: Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$. In dieser Aufgabe wollen wir die folgende Formel untersuchen, die u.a. in der theoretischen Sequenzanalyse zum Einsatz kommt:

$$\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n+1}{\ell} a^{\ell} (b-a)^{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} a^{\ell} b^{n-\ell}$$

(a) Schreiben Sie die Formel für $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$ aus und überprüfen Sie dann ihre Gültigkeit.

(b) Vereinfachen Sie die Summen auf beiden Seiten für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, aber $b = a$. Was schließen Sie hieraus?

(c) Betrachten Sie nun den Fall $a = 0$ und prüfen Sie die Gleichheit.

(d) Beweisen Sie schließlich den allgemeinen Fall unter Verwendung des binomischen Satzes ($y = b - a$ setzen und geeignete Ergänzung suchen!) und der Formel für die geometrische Reihe (a^n durch geeignetes Ausklammern vor den Bruch ziehen!). Wozu brauchen Sie die Teile (b) und (c)?

(2+2+1+5 Punkte)

Aufgabe 7: Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der nachstehenden Folgen und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:

(a)
$$a_1 = 1; \quad a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}} \quad (n \geqslant 2)$$

(b)
$$a_n = \frac{n}{n^2+1}$$

(c)
$$a_n = n + \frac{1}{n}$$

(d)
$$a_n = \frac{3n^2+n+1}{4n^2-n+17}$$

Hinweis zu (d): Formen Sie den Ausdruck geeignet um, so dass der Satz über die Rechenregeln mit Grenzwerten eingesetzt werden kann!

(2+1+1+2 Punkte)

Abgabe bis zum 30.10.2009!