Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 30.10.2009

Wintersemester 2009/10

Mathematik I für NWI/Analysis

Übungszettel 3

Aufgabe 8: Zeigen Sie auf direktem Wege (also ohne Verwendung des Äquivalenzsatzes für reelle Folgen), dass jede Cauchy-Folge beschränkt ist.

Hinweis: Wählen Sie ein geeignetes $\varepsilon > 0$ aus und benutzen Sie a_{n_0} mit $n_0 = n_0(\varepsilon)$ als Referenzelement.

(3 Punkte)

Aufgabe 9: Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell(\ell+1)} .$$

(a) Berechnen Sie die Partialsummen

$$S_n = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell(\ell+1)} \qquad \text{für } 1 \leqslant n \leqslant 5.$$

(b) Formulieren Sie eine Vermutung für eine Formel für S_n, und beweisen Sie diese per Induktion.

(c) Ist die Reihe konvergent? Wenn ja, was ist ihre Summe?

(1 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 10: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die Formeln

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$$

und

$$\min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, was $\max\{a,b\} \pm \min\{a,b\}$ ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 11: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in [0,1]$. Zeigen Sie die Gültigkeit von

$$\min\{a,b\} \leqslant \alpha \cdot a + (1-\alpha) \cdot b \leqslant \max\{a,b\}.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 12: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geqslant 0$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel.

(2 Punkte)

Abgabe bis zum 6.11.2009!