Universität Bielefeld

Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 6.11.2009

Wintersemester 2009/10

Mathematik I für NWI/Analysis

Übungszettel 4

Aufgabe 13: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei absolut konvergent. Zeigen Sie, dass sie dann auch konvergent ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 14: Weisen Sie Konvergenz nach und berechnen Sie den Grenzwert für:

(a) $a_1 := \sqrt{2}, \quad a_n := \sqrt{2 + a_{n-1}} \quad (n \geqslant 2)$

Hinweis: Weisen Sie zunächst (durch Induktion) nach, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wächst (quadrieren Sie die Rekursion!); weisen Sie dann (wieder durch Induktion) nach, dass die Folge nach oben beschränkt ist (wodurch?).

Bestimmen Sie schließlich den Grenzwert a, indem Sie eine geeignete Gleichung für a aufstellen.

(b) $b_n := \dfrac{1 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}$

(4+2 Punkte)

Aufgabe 15: Sei $\alpha \geqslant 1$ beliebig, aber fest. Untersuchen Sie die Folge $(\sqrt[n]{\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$. Ist sie konvergent? Wenn ja, was ist ihr Grenzwert?

(3 Punkte)

Aufgabe 16: Prüfen Sie die Konvergenz und berechnen Sie ggf. die Summe für:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-3)^k}{4^k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^2}{k!}$

(2+2+3 Punkte)

Abgabe bis zum 13.11.2009!