Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 13.11.2009

Wintersemester 2009/10

Mathematik I für NWI/Analysis

Übungszettel 5

Aufgabe 17: Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass f dann auch gleichmäßig stetig ist auf I.

(2 Punkte)

Aufgabe 18: Wir betrachten die Funktion $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion f.

(b) Zeigen Sie, dass f an der Stelle 1 unstetig ist, sonst aber stetig.

(c) Wie müsste man f verändern, um eine stetige Funktion zu bekommen?

(1+2+1 Punkte)

Aufgabe 19: Bestimmen Sie den Konvergenz-Radius für folgende Potenzreihen:

(a) $\sum_{n \geqslant 0} \alpha^n x^n \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

(b) $\sum_{n \geqslant 0} n^k x^n \qquad (k \in \mathbb{N})$

(c) $\sum_{n \geqslant 0} \beta^{\sqrt{n}} x^n \qquad (\beta > 0)$

(2+2+3 Punkte)

Aufgabe 20: Wir betrachten die hyperbolischen Funktionen

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

und

$$\cosh(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

(a) Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius beider Reihen ∞ ist.

(b) Verifizieren Sie die Relationen

$$\sinh(x) + \cosh(x) = \exp(x)$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \cosh(-x) = \cosh(x),$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \sinh(-x) = -\sinh(x).$$

(c) Skizzieren Sie die Funktionen e^x, $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ (Sie dürfen für die Berechnung von e^x einen Taschenrechner einsetzen).

(2+3+2 Punkte)

Abgabe bis zum 20.11.2009!