Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 20.11.2009

Wintersemester 2009/10

Mathematik I für NWI/Analysis

Übungszettel 6

Aufgabe 21: (a) Berechnen Sie zunächst aus den definierenden Potenzreihen die Ableitungen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$.

(b) Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen, und geben Sie jeweils an, wo sie differenzierbar sind:

$$\sin(x)\cdot\cos(x), \quad \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \operatorname{ctg}(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)},$$

$\operatorname{Arccos}(x)$ (Umkehrfunktion von $\cos(x)$ auf $[0,\pi]$),
$\operatorname{Arcsin}(x)$ (Umkehrfunktion von $\sin(x)$ auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$),
$\operatorname{Arctan}(x)$ (Umkehrfunktion von $\tan(x)$ auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$).

(c) Skizzieren Sie die 3 Umkehrfunktionen und geben Sie Definitions- und Wertebereiche an.

Hinweis zu (b): Verwenden Sie bei den Arcus-Funktionen die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion sowie die Relation $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.

(1+3+1 Punkte)

Aufgabe 22: Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^\alpha \log(x) \quad (\alpha > 0)$

(b) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(\frac{x}{2})}{1-\cos(x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

(1+1+2+1 Punkte)

Bitte wenden!

Aufgabe 23: Berechnen Sie die Taylor-Reihen (um 0) für folgende Funktionen, und bestimmen Sie auch deren Konvergenzradius:

(a) $f(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$

(b) $g(x) = \operatorname{Arctan}(x)$

<u>Hinweis</u>: Berechnen Sie die höheren Ableitungen der Funktionen mittels vollständiger Induktion. Setzen Sie dazu bei (b) an:

$g^{(n)}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$ (für $n \geqslant 1$) und leiten Sie hieraus folgende Rekursion ab:

$P_0(x) = 1; \quad P_n(x) = (1+x^2)P'_{n-1}(x) - 2nxP_{n-1}(x)$ (für $n \geqslant 1$).

Zeigen Sie nun, dass die P_n abwechselnd gerade und ungerade Polynome sind, und folgern Sie $g^{(2m)}(0) = 0$ für $m \in \mathbb{N}$.

Weiter gilt, dass $P'_n(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$ (für $n \geqslant 1$). Leiten Sie hiermit eine neue Rekursion für die Polynome P_n ab, in der keine Ableitungen mehr vorkommen, und folgern Sie $g^{(2m+1)}(0) = (-1)^m(2m)!$.

(3+4 Punkte)

Für den Beweis von $P'_n(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$ gibt es **2 Extrapunkte**!

Abgabe bis zum 27.11.2009!