Universität Bielefeld

Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 27.11.2009

Wintersemester 2009/10

Mathematik I für NWI/Analysis

Übungszettel 7

Aufgabe 24: Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $H \subseteq G$. Dann heißt $(H, \cdot)$ Untergruppe von $(G, \cdot)$, wenn $(H, \cdot)$ ebenfalls eine Gruppe ist.

(a) Zeigen Sie, dass das neutrale Element von H das neutrale Element von G ist.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $a \in H$ gilt: Das inverse Element a^{-1} in H ist das gleiche wie in G.

(c) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

i. $(H, \cdot)$ ist Untergruppe von $(G, \cdot)$.

ii. Für zwei beliebige Elemente $a, b \in H$ gilt: sowohl $a^{-1} \in H$ als auch $ab \in H$.

iii. Für zwei beliebige Elemente $a, b \in H$ gilt: $a^{-1}b \in H$.

Hinweis: Zeigen Sie i.$\Rightarrow$ii., ii.$\Rightarrow$ iii., iii.$\Rightarrow$ i.

(1+1+3 Punkte)

Aufgabe 25: Sei $n \in \mathbb{N}$ fix. Für $m \in \mathbb{Z}$ sei $\langle m \rangle := \{\, m + kn \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$ und $G = \{\, \langle m \rangle \mid m \in \{0, \ldots, n-1\} \,\}$. Sei $+$ definiert durch $\langle m \rangle + \langle \ell \rangle := \langle m + \ell \rangle$ für $m, \ell \in \mathbb{Z}$. Desweiteren sei $\cdot$ definiert durch $\langle m \rangle \cdot \langle \ell \rangle := \langle m\ell \rangle$.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle m' \rangle = \langle m \rangle$ genau dann gilt, wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert mit $m' = m + kn$. Weisen Sie nach, dass $+$ und $\cdot$ wohldefiniert sind, d.h. $\langle m' + \ell' \rangle = \langle m + \ell \rangle$ und $\langle m'\ell' \rangle = \langle m\ell \rangle$, falls $\langle m \rangle = \langle m' \rangle$ und $\langle \ell \rangle = \langle \ell' \rangle$.

(b) Zeigen Sie, dass $(G, +)$ eine Gruppe ist.

(c) Zeigen Sie: Falls n eine Primzahl ist und ℓ fix ist, so sind die $n-1$ Mengen $\langle m\ell \rangle$ mit $1 \leqslant m \leqslant n-1$ alle verschieden und ungleich $\langle 0 \rangle$, oder ℓ ist durch n teilbar. Schließen Sie daraus, dass es zu jedem $\ell \in \{1, \ldots, n-1\}$ ein $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ gibt, so dass $\langle m\ell \rangle = \langle 1 \rangle$.

(d) Zeigen Sie, dass $(G, +, \cdot)$ ein Körper ist, falls n eine Primzahl ist.
Hinweis: Benutzen Sie (c) zum Beweis der Existenz des multiplikativen inversen Elements.

(e) Ist $(G, +, \cdot)$ ein Körper, falls n eine zusammengesetzte Zahl ist, wenn also $n = r \cdot s$ mit $r, s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$?

(2+1+2+2+1 Punkte)

Aufgabe 26: Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie, dass gilt

(a) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

(b) $(-1) \cdot a = -a$

(c) $a \cdot (-b) = -ab = (-a) \cdot b$

(d) $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$

(1+1+1+1 Punkte)

Bitte wenden!

Aufgabe 27: Sei $S = \{\, q + \sqrt{2}r \mid q, r \in \mathbb{Q} \,\}$. Seien $+$ und $\cdot$ die übliche Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$.

(a) Ist $(S, +)$ eine abelsche Gruppe?

(b) Ist $(S, +, \cdot)$ ein Körper?

(c) Ist S ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$?

(1+1+1 Punkte)

Abgabe bis zum 4.12.2009!