Universität Bielefeld

Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 11.12.2009

Wintersemester 2009/10

Mathematik I für NWI/Analysis

Übungszettel 9

Aufgabe 33: Seien W_1, W_2 Unterräume eines endlich dimensionalen Vektorraums V.

(a) Zeigen Sie, dass gilt: $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2)$
Hinweis: Erweitern Sie eine Basis von $W_1 \cap W_2$ zu Basen von W_1 und W_2 und konstruieren Sie daraus dann eine Basis von $W_1 + W_2$.

(b) Folgern Sie aus (a), dass $W_1 + W_2$ genau dann eine direkte Summe ist, falls $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2)$.

(3+1 Punkte)

Aufgabe 34: Lösen Sie die Gleichung $x^2 + 2x + 3 = 0$ in $\mathbb{C}$. Sind die Lösungen reell?

(2 Punkte)

Aufgabe 35: (a) Zeigen Sie mit Hilfe der Potenzreihe von $\exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$, dass folgende Gleichung gilt:

$$\exp(ix) = e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$$

(b) Zeigen Sie, dass $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ und $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big)$ gilt.
Hinweis: $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ gilt auch für komplexe Exponenten.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 36: Berechnen Sie $(1+i)^2$, i^{10}, $e^{i\frac{\pi}{4}}$ und $\frac{4+i}{1-i}$.
Hinweis: Wie erreicht man, dass der Nenner reell wird?

(4 Punkte)

Abgabe bis zum 18.12.2009!