MUSTERLÖSUNG ZU AUSGEWÄHLTEN AUFGABEN DER KLAUSUR VOM 04. 02. 2011

2(a) Entscheiden Sie (mit Begründung), ob folgende Aussage richtig oder falsch ist: $\sqrt{\mathrm{i}}$ *ist algebraisch.*

Lösung. Richtig, denn $\sqrt{\mathrm{i}}$ ist Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten, nämlich $x^4 + 1$.

4(c) Für welche x ist die Funktion $\log\big(\cosh(\sqrt{x}) \cdot \sin(x^2)\big)$ differenzierbar? Berechnen Sie die Ableitung.

Lösung. Die Funktion ist differenzierbar für $x > 0$, falls $\sin(x^2) > 0$, denn $\log\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Darüberhinaus gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, also

$$\frac{1}{\cosh(\sqrt{x}) \cdot \sin(x^2)} \left(2x \cdot \cos(x^2) \cdot \cosh(\sqrt{x}) + \sin(x^2) \cdot \sinh(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$= 2x \cdot \cot(x^2) + \frac{\tanh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

5(c) Bestimmen Sie folgendes Integral (sofern es existiert):

$$\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung.

$$\begin{aligned} \int_0^N x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= -x\,\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^N + \int_0^N \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Partielle Integration)} \\ &= -N\,\mathrm{e}^{-N} - \mathrm{e}^{-x}\Big|_0^N \\ &= -\,\mathrm{e}^{-N}(N+1) + 1. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\lim_{N\to\infty} (N+1) \cdot \mathrm{e}^{-N} = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{\mathrm{e}^N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^N} = 0$$

nach dem *Satz von l'Hospital.* Daraus folgt

$$\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \int_0^N x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1,$$

weil $x\,\mathrm{e}^{-x}$ eine Regelfunktion auf $[0, N]$ ist.

7(a) Sei i die imaginäre Einheit. Berechnen Sie $(\mathrm{i} + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^7)^5$.

Lösung. Wegen $\mathrm{i}^2 = -1$ folgt

$$\big(\mathrm{i} + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^7\big)^5 = (\mathrm{i} - \mathrm{i} + \mathrm{i} - \mathrm{i})^5 = 0^5 = 0.$$

8(a) Seien

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0 \right\} \text{ und } V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = -z \right\}.$$

Bestimmen Sie $U \cap V$ und $U + V$.

Lösung. Es gilt $x + z = 0 \Leftrightarrow x = -z$. Daraus folgt $V \subseteq U$, also

$$U \cap V = V \quad \text{und} \quad U + V = U.$$

8(c) Seien $f\colon U \to V$ und $g\colon U \to V$ zwei lineare Abbildungen. Zeigen Sie: $W := \{\, x \mid f(x) = g(x) \,\}$ ist ein Unterraum von U.

Lösung. Nachzuweisen ist die Gültigkeit der Unterraumeigenschaften für W. Aufgrund der Linearität von f und g gilt für alle $x, y \in W$ und $a, b \in K$

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y) = ag(x) + bg(y) = g(ax + by),$$

also ist W abgeschlossen gegenüber der Addition und der skalaren Multiplikation mit Elementen aus K. Wegen $f(0) = 0 = g(0)$ gilt auch $0 \in W$, also ist insbesondere $W \neq \varnothing$.