Universität Bielefeld

Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät fr Mathematik

Bielefeld, 27.01.2011

- Wintersemester 2010/2011

Mathematik I für NWI/Lineare Algebra

freiwilliger Übungszettel

Aufgabe 60: Sei $\{e_1, e_2\}$ die kanonische Basis im $\mathbb{R}^2$ und $e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$, $e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_2)$ eine um $45°$ gedrehte Basis.

(a) Sei $x = e_1 + 2e_2$. Geben Sie x bezüglich der Basis $\{e_1', e_2'\}$ an, d.h. berechnen Sie die Koeffizienten x_1', x_2' in $x = x_1'e_1' + x_2'e_2'$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basis $\{e_1', e_2'\}$, d.h. berechnen Sie die Matrix $A' = (a_{ij}')_{2\times 2}$ mit $f(e_i') = \sum_{j=1}^{2} a_{ji}'e_j'$. (<u>Hinweis</u>: Die Matrixdarstellung bezüglich der kanonischen Basis ist gerade A) Was fällt auf?

(c) Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = Cx$ mit $C = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrixdarstellung von g bezüglich der Basis $\{e_1', e_2'\}$. Was fällt auf?

Aufgabe 61: Seien A, B, T $n \times n$-Matrizen und T invertierbar. Weiters sei $B = T^{-1}AT$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass $B^n = T^{-1}A^nT$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Inverse von B durch $B^{-1} = T^{-1}A^{-1}T$ gegeben ist.

(c) Zeigen Sie, dass $B^n = T^{-1}A^nT$ auch für $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

Aufgabe 62: Zeigen Sie, dass $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix ist.

Aufgabe 63: Zeigen Sie, dass $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ gilt.
<u>Hinweis</u>: Verwenden Sie, dass $(AB)^T = B^TA^T$ gilt.