Universität Bielefeld

Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 17.12.2010

Wintersemester 2010/2011

Mathematik I für Informatik/Lineare Algebra

Übungszettel 10

Aufgabe 38: Sei $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie I^2, I^3 und I^4.

(b) Sei $U = \{ aE + bI \mid a, b \in \mathbb{R} \}$. Zeigen Sie: Sind $A, B \in U$, so ist auch $AB \in U$.

(c) Zeigen Sie, dass $AB = BA$ für alle $A, B \in U$.

(d) Sei $A = aE + bI \in U$. Zeigen Sie, dass A invertierbar ist, falls $a \neq 0$ oder $b \neq 0$.
Hinweis: Überprüfen Sie, dass A^{-1} durch $A^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}(aE - bI)$ gegeben ist.

(e) Woran erinnert Sie U?

(1+1+1+2+1 Punkte)

Aufgabe 39: Sei A die folgende $n \times n$-Matrix.

$$A = (a_{ij})_{n\times n}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i-1-j \text{ durch } n \text{ teilbar} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Geben Sie A für $n = 4$ an.

(b) Berechnen Sie A^m für $m \in \mathbb{N}$ (für beliebige $n \in \mathbb{N}$).
Hinweis: Berechnen Sie zunächst A^2 und stellen Sie dann eine Vermutung für A^m auf (Beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion!). Sie können – müssen aber nicht – das folgende Symbol verwenden:

$$\delta_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \text{ durch } n \text{ teilbar} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie dazu $\delta_{i-k}^{(n)}\delta_{k-j}^{(n)} = \delta_{i-k}^{(n)}\delta_{i-j}^{(n)}$ und überlegen Sie sich, was $\sum_{k=1}^{n} \delta_{i-k}^{(n)}$ und $\sum_{k=1}^{n} \delta_{i-k}^{(n)}\delta_{k-j}^{(n)}$ ist.

(1+3 Punkte)

Aufgabe 40: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Geben Sie alle Matrizen B an, für die $AB = E_2$ gilt. Zeigen Sie, dass es keine Matrix C mit $CA = E_3$ gibt.

(3 Punkte)

Aufgabe 41: Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear sind. Wenn ja, geben Sie eine Matrix A mit $f(x) = Ax$ an.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2$

(3 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 42*: Zeigen Sie die Gültigkeit der Formel

$$1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}=2^{n-1}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$.

1 Punkt)

Aufgabe 43*: Ist $\sqrt{\pi}$ berechenbar?
Ist $\sqrt{i}$ berechenbar? **(1 Punkt)**

Aufgabe 44*: Berechnen Sie die Ableitung von $\log(\frac{1}{1+x^2})$ und $(\sin(x))^3 \cdot (\cos(x))^2$ **(1 Punkt)**

Aufgabe 45*: Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\cos(n)}{7n+1}$ und $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\pi^2)^k}{(2k)!}$

(1 Punkt)

Aufgabe 46*: Eine reelle Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ sei Intervall) heißt **konvex**, wenn $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$ gilt, für alle $x, y \in I$ und $\alpha \in [0,1]$.

(a) Erläutern Sie die Bedeutung der Konvexität anhand einer Skizze.

(b) Zeigen Sie per Induktion (in n), dass auch $f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \ldots + a_n f(x_n)$ gilt, für alle $x_1, \ldots x_n \in I$ und $\alpha_i \geq 0$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

(2 Punkte)

Aufgabe 47*: Seien $f\colon U \to V$ und $g\colon U \to V$ linear. Zeigen Sie, dass $f+g$ linear ist. **(1 Punkt)**

Aufgabe 48*: Zeigen Sie $A(B+C) = AB + AC$, wenn A, B, C Matrizen geeigneter Dimension sind. Was bedeutet "geeignete Dimension"? **(1 Punkt)**

Aufgabe 49*: Das Bild einer linearen Abbildung $f\colon U \to V$ ist als $\mathrm{im} f := \{\, y \in V \mid \exists\, x \in U \text{ mit } f(x) = y \,\}$ definiert. Zeigen Sie, dass $\mathrm{im} f$ ein Unterraum von V ist und dass $\dim \mathrm{im} f \leqslant \dim V$.

(1 Punkt)

Aufgabe 50*: Bilden die folgenden Mengen eine Basis des $\mathbb{C}^3$ über $\mathbb{C}$? Begründung!

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\2\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\\0\\0 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\-3\\i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i^2\\5\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i^3\\-i\\-i^5 \end{pmatrix} \right\}$

(1 Punkt)

(bitte wenden)

Aufgabe 51*: Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen zusammen mit $+$ und $\cdot$ einen Körper bilden (mit Begründung):

i. $(M, +, \cdot)$ mit $M = \{n + mi \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, wobei $+$ und $\cdot$ die üblichen Rechenoperationen in $\mathbb{C}$ sind.
ii. $(\mathrm{GL}(n), +, \cdot)$, wobei $+$ und $\cdot$ Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation sind.
iii. $(S, +, \cdot)$ mit $S = \{p+qi \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$, wobei $+$ mit $\cdot$ die üblichen Rechenoperationen in $\mathbb{C}$ sind.

(2 Punkte)

Abgabe als Hardcopy bis zum 07.01.2011!

Frohe Weihnachtszeit und einen guten Rutsch ins Jahr 2011!