

Wintersemester 2010/2011

Mathematik I für Informatik/Lineare Algebra

Übungszettel 12

Aufgabe 56: Eine Teilmenge U eines Vektorraums V heißt affiner Unterraum von V , wenn ein Vektor $x \in V$ und ein Unterraum W von V existieren, so dass $U = x + W$ ist. Sei nun $U = x + W$ ein affiner Unterraum.

- Zeigen Sie $\{v - w \mid v, w \in U\} = W$, d.h. die Differenzen der Vektoren aus U bilden den Unterraum W von V .
- Muss $x \in U$ gelten? Ist x eindeutig bestimmt? Ist W eindeutig bestimmt?
- Sei $f: V \rightarrow V'$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge U der Gleichung $f(x) = c$, $c \in V'$, entweder die leere Menge oder ein affiner Unterraum ist. Was ist W in diesem Fall?
- Die Dimension des affinen Unterraums U ist durch $\dim U := \dim W$ definiert. Sei f wie oben. Sei $\dim V = n_1$, $\dim V' = n_2$ und $\dim \ker(f) = n_3$. Was ist die Dimension des affinen Lösungsraumes $U = \{x \mid f(x) = c\}$, falls U nicht leer ist?

(2+2+2+1 Punkte)

Aufgabe 57: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie die Gleichung $Ax = b$ mit Hilfe des Verfahrens aus Bemerkung 4.31. Geben Sie die gesamte Lösungsmenge an. Was ist der Rang von A , welche Dimension hat der (affine) Lösungsraum? (siehe Aufgabe 50)

(4 Punkte)

Aufgabe 58: Bringen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

auf reduzierte Zeilenstufenform. Welchen Rang hat A ? Ist A invertierbar?

(3 Punkte)

Aufgabe 59: Invertieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -3 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

falls sie invertierbar ist.

(3 Punkte)

Abgabe bis zum 28.01.2011!