Universität Bielefeld

Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 22.10.2010

Wintersemester 2010/2011

Mathematik I für Informatik/Analysis

Übungszettel 2

Aufgabe 4: Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$. In dieser Aufgabe wollen wir die folgende Formel untersuchen, die u.a. in der theoretischen Sequenzanalyse zum Einsatz kommt:

$$\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n+1}{\ell} a^{\ell} (b-a)^{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} a^{\ell} b^{n-\ell}$$

(a) Schreiben Sie die Formel für $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$ aus und überprüfen Sie dann ihre Gültigkeit.

(b) Vereinfachen Sie die Summen auf beiden Seiten für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, aber $b = a$. Was schließen Sie hieraus?

(c) Betrachten Sie nun den Fall $a = 0$ und prüfen Sie die Gleichheit.

(d) Beweisen Sie schließlich den allgemeinen Fall unter Verwendung des binomischen Satzes ($y = b - a$ setzen und geeignete Ergänzung suchen!) und der Formel für die geometrische Reihe (a^n durch geeignetes Ausklammern vor den Bruch ziehen!). Wozu brauchen Sie die Teile (b) und (c)?

(2+2+1+3 Punkte)

Aufgabe 5: Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der nachstehenden Folgen und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:

(a) $a_1 = 3; \quad a_{n+1} = 1 + a_n - \frac{3}{a_n} \quad (n \geqslant 1)$

(b) $a_n = \frac{3n}{n^2+7} \quad (n \in \mathbb{N})$

(c) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$

(d) $a_n = \frac{3n^2-7n+5}{2n^2+4n+3} \quad (n \in \mathbb{N})$

Hinweis zu (d): Formen Sie den Ausdruck geeignet um, so dass der Satz über die Rechenregeln mit Grenzwerten eingesetzt werden kann!

(2+1+1+2 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 6: Beweisen Sie, dass $\sqrt{2}$ irrational ist. Nehmen Sie dazu zunächst an, dass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ geht. Dabei kann man dann p und q teilerfremd annehmen (warum?). Leiten Sie nun aus der Identität $p^2 = 2q^2$ (Begründung!) einen Widerspruch ab, und schließen Sie auf $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Hinweis: Eine natürliche Zahl m ist genau dann gerade, wenn m^2 gerade ist. (warum?)

(3 Punkte)

Abgabe bis zum 29.10.2010!