Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 05.11.2010

Wintersemester 2010/2011

Mathematik I für Informatik/Analysis

Übungszettel 4

Aufgabe 11: Wir betrachten die Rekursion $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$ für $n \geq 1$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass die so definierte Folge konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert in Abhängigkeit von α und β.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Formel $a_n = \frac{1}{3}(\alpha + 2\beta) + \frac{2}{3}(\alpha - \beta) \cdot \frac{(-1)^n}{2^n}$.

(3 Punkte)

Aufgabe 12: Prüfen Sie die Konvergenz und berechnen Sie ggf. die Summe für:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{5^k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$

(1+1+2 Punkte)

Aufgabe 13: Betrachte die rekursiv def. Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ $(n \geq 2)$. Weisen Sie ihre Konvergenz nach und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis: Weisen Sie zunächst (durch Induktion) nach, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wächst (quadrieren Sie die Rekursion); weisen Sie dann (wieder durch Induktion) nach, dass die Folge nach oben beschränkt ist (wodurch?). Leiten Sie schließlich eine Gleichung für den Grenzwert ab.

(3 Punkte)

Aufgabe 14: Wir betrachten die Funktion $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion f.

(b) Zeigen Sie, dass f an der Stelle 1 unstetig ist, sonst aber stetig.

(c) Wie müsste man f verändern, um eine stetige Funktion zu bekommen?

(2 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 15: Konstruieren Sie eine Funktion f, die nirgendwo stetig ist, aber die Eigenschaft besitzt, dass $|f|$ überall stetig ist.

(1 Punkt)

Abgabe bis zum 12.11.2010!