Universität Bielefeld

Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 19.11.2010

Wintersemester 2010/2011

Mathematik I für Informatik/Analysis

Übungszettel 6

Aufgabe 19: (a) Berechnen Sie zunächst aus den definierenden Potenzreihen die Ableitungen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$.

(b) Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen, und geben Sie jeweils an, wo sie differenzierbar sind:

$\sin(x) \cdot \cos(x)$, $\quad \tan(x) := \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $\quad \operatorname{ctg}(x) := \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$,

$\operatorname{Arccos}(x)$ (Umkehrfunktion von $\cos(x)$ auf $[0, \pi]$),

$\operatorname{Arcsin}(x)$ (Umkehrfunktion von $\sin(x)$ auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$),

$\operatorname{Arctan}(x)$ (Umkehrfunktion von $\tan(x)$ auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).

(c) Skizzieren Sie die 3 Umkehrfunktionen und geben Sie Definitions- und Wertebereiche an.

Hinweis zu (b): Verwenden Sie bei den Arcus-Funktionen die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion sowie die Relation $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.

(1+2+1 Punkte)

Aufgabe 20: Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cosh(x) - 1}{3x^2}$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} \cdot \cosh(x)$

(c) $\lim\limits_{x \searrow 0} x^x$

Hinweis: überlegen Sie sich für Teil (c) zunächst den Grenzwert von $x \cdot \log(x)$ für $x \searrow 0$.

(1+1+2 Punkte)

Aufgabe 21: Berechnen Sie die Taylor-Reihe (um 0) für $f(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$, und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius.

Hinweis: Berechnen Sie die höheren Ableitungen der Funktion mittels Induktion.

(3 Punkte)

Aufgabe 22*: Setzen Sie die Potenzreihen für $\cos(x)$ und $\sin(x)$ ein, um die Güligkeit der Formel

$$(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ zu beweisen.

Hinweis: Berechnen Sie die Potenzreihe der Funktion $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2$ und zeigen Sie, dass (außer dem konstanten Term) alle Koeffizienten verschwinden.

(3 Punkte)

Abgabe bis zum 26.11.2010!