Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Universität Bielefeld

Bielefeld, 26.11.2010

Wintersemester 2010/2011

Mathematik I für Informatik/Analysis/Lineare Algebra

Übungszettel 7

Aufgabe 23: Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $H \subseteq G$. Dann heißt $(H, \cdot)$ Untergruppe von $(G, \cdot)$, wenn $(H, \cdot)$ ebenfalls eine Gruppe ist.

(a) Zeigen Sie, dass das neutrale Element von H das neutrale Element von G ist.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $a \in H$ gilt: Das inverse Element a^{-1} in H ist das gleiche wie in G.

(c) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

i. $(H, \cdot)$ ist Untergruppe von $(G, \cdot)$.

ii. Für zwei beliebige Elemente $a, b \in H$ gilt: sowohl $a^{-1} \in H$ als auch $ab \in H$.

iii. Für zwei beliebige Elemente $a, b \in H$ gilt: $a^{-1}b \in H$.

Hinweis: Zeigen Sie i.⇒ii., ii.⇒ iii., iii.⇒ i.

(1+1+3 Punkte)

Aufgabe 24: Wir betrachten die Gruppe G der Permutationen von drei Elementen, d. h. die Gruppe der bijektiven Abbildungen von $M = \{1, 2, 3\}$ nach M.

(a) Zeigen Sie, dass G nicht abelsch ist, d. h. finden Sie zwei Elemente $a, b \in G$ mit $ab \neq ba$.

(b) Wieviele Elemente besitzt G?

(c) Für welche n gibt es ein $g \in G, g \neq \mathrm{e}$ mit $g^n = e$?

(d) Wie lässt sich G geometrisch deuten?

(1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 25: Zeigen Sie, dass es einen Körper mit zwei Elementen gibt.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie man auf der Menge $\{0, 1\}$ Addition und Multiplikation definieren muss, damit die Körperaxiome erfüllt sind.

(3 Punkte)

Aufgabe 26: Sei $G = \{p + \sqrt{3}\ q \mid p, q \in \mathbb{Q}\} \cap \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist, wenn $\cdot$ die übliche Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist.

(2 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 27*: Berechnen Sie die Taylor-Reihe von $f(x) = \mathrm{Arctan}(x)$ um 0, und bestimmen Sie auch deren Konvergenzradius.

Hinweis: Setzen Sie für $n \geq 1$ an. $f^{(n)}(x) = \frac{P_{n-1}}{(1+x^2)^n}$ und leiten Sie für die P_n folgende Rekursion ab: $P_0(x) = 1, ; P_n(x) = (1 + x^2)P'_{n-1}(x) - 2nxP_{n-1}(x)$ (für $n \geq 1$).

Zeigen Sie nun, dass die P_n abwechselend gerade und ungerade Polynome sind, und folgern Sie $f^{(2m)}(0) = 0$ für $m \in \mathbb{N}$.

Weiter gilt, dass $P'_n(x) = -n(n + 1) \cdot P_{n-1}(x)$ (für $n \geq 1$). (Beweis ?) Leiten Sie hiermit eine neue Rekursion für die Polynome P_n ab, in der keine Ableitungen mehr vorkommen, und folgern Sie $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m(2m)!$

(5 Punkte)

Abgabe bis zum 03.12.2010!