Universität Bielefeld

Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 03.12.2010

Wintersemester 2010/2011

Mathematik I für Informatik/Lineare Algebra

Übungszettel 8

Aufgabe 28: Seien W_1, W_2 Unterräume eines Vektorraums V.

(a) Zeigen Sie, dass $W_1 + W_2$ ein Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass $W_1 + W_2$ der kleinste Vektorraum ist, der W_1 und W_2 enthält.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(W_1 \cup W_2) = W_1 + W_2$ gilt.

(d) Finden Sie zwei Unterräume $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, für die $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$ aber $W_1 \cup W_2 \neq \mathbb{R}^2$ gilt. Ist $W_1 \cup W_2$ in diesem Fall ein Unterraum?

(1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 29: Sei $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z - 2y = 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass W Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Geben Sie zwei verschiedene Basen von W an.

(c) Sei $W' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z - 2y = -1\}$. Ist W' Unterraum von $\mathbb{R}^3$?

(d) Sei $W'' = \{v - w \mid v, w \in W'\}$. Ist W'' Unterraum von $\mathbb{R}^3$? Was fällt Ihnen auf?

(1+2+1+1 Punkte)

Aufgabe 30: Sei $V = \mathbb{R}^3, W_1 = \{(a, b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, W_2 = \{(c, -d, d) \mid c, d \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie $W_1 \cap W_2$ und $W_1 + W_2$.

(2 Punkte)

Aufgabe 31: Sei $V = W_1 \oplus W_2$ und seien B_1 und B_2 Basen von W_1 bzw. W_2. Zeigen Sie, dass $B_1 \cup B_2$ eine Basis von V ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 32*: Sei $n \in \mathbb{N}$ fix. Für $m \in \mathbb{Z}$ sei $\langle m \rangle := \{\, m + kn \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$ und $G = \{\, \langle m \rangle \mid m \in \{0, \dots, n-1\} \,\}$. Sei $+$ definiert durch $\langle m \rangle + \langle \ell \rangle := \langle m + \ell \rangle$ für $m, \ell \in \mathbb{Z}$. Des Weiteren sei $\cdot$ definiert durch $\langle m \rangle \cdot \langle \ell \rangle := \langle m\ell \rangle$.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle m' \rangle = \langle m \rangle$ genau dann gilt, wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert mit $m' = m + kn$. Weisen Sie nach, dass $+$ und $\cdot$ wohldefiniert sind, d.h. $\langle m' + \ell' \rangle = \langle m + \ell \rangle$ und $\langle m'\ell' \rangle = \langle m\ell \rangle$, falls $\langle m \rangle = \langle m' \rangle$ und $\langle \ell \rangle = \langle \ell' \rangle$.

(b) Zeigen Sie, dass $(G, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(c) Zeigen Sie: Falls n eine Primzahl ist und ℓ fix ist, so sind die $n - 1$ Mengen $\langle m\ell \rangle$ mit $1 \leqslant m \leqslant n - 1$ alle verschieden und ungleich $\langle 0 \rangle$, oder ℓ ist durch n teilbar. Schließen Sie daraus, dass es zu jedem $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$ ein $m \in \{1, \dots, n-1\}$ gibt, so dass $\langle m\ell \rangle = \langle 1 \rangle$.

(bitte wenden)

(d) Zeigen Sie, dass $(G, +, \cdot)$ ein Körper ist, falls n eine Primzahl ist.
Hinweis: Benutzen Sie (c) zum Beweis der Existenz des multiplikativen inversen Elements.

(e) Ist $(G, +, \cdot)$ ein Körper, falls n eine zusammengesetzte Zahl ist, wenn also $n = r \cdot s$ mit $r, s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$?

(1+1+1+1+1 Punkte)

Abgabe bis zum 10.12.2010!