Universität Bielefeld

Michael Baake
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 10.12.2010

Wintersemester 2010/2011

Mathematik I für Informatik/Lineare Algebra

Übungszettel 9

Aufgabe 33: (a) Zeigen Sie mit Hilfe der Potenzreihe von $\exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$, dass folgende Gleichung gilt:

$$\exp(ix) = e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$$

(b) Zeigen Sie, dass $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ und $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)$ gilt.
Hinweis: $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ gilt auch für komplexe Exponenten.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 34: Berechnen Sie $(2+i)^3$, i^{-5}, $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ und $\dfrac{3+i}{i+1}$.
Hinweis: Wie erreicht man, dass der Nenner reell wird?

(4 Punkte)

Aufgabe 35: Lösen Sie die Gleichung $z^4 = -1$ in $\mathbb{C}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Polardarstellung von -1.

(2 Punkte)

Aufgabe 36: Sei S eine linear unabhängige Teilmenge des Vektorraumes V. Zeigen Sie:

(a) S ist genau dann eine Basis von V, wenn es keine linear unabhängige Teilmenge $T \subseteq V$ mit $S \subset T$, d. h. $S \subseteq T$ und $S \neq T$, gibt.

(b) Ist V n-dimensional, so hat S höchstens n Vektoren.

(2+1 Punkte)

Aufgabe 37*: Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie, dass es zu jedem Unterraum W von V einen Unterraum W' gibt, sodass $V = W \oplus W'$.
Hinweis: Basisergänzungssatz

(1 Punkt)

Abgabe bis zum 17.12.2010!